

Library of

Wellesley

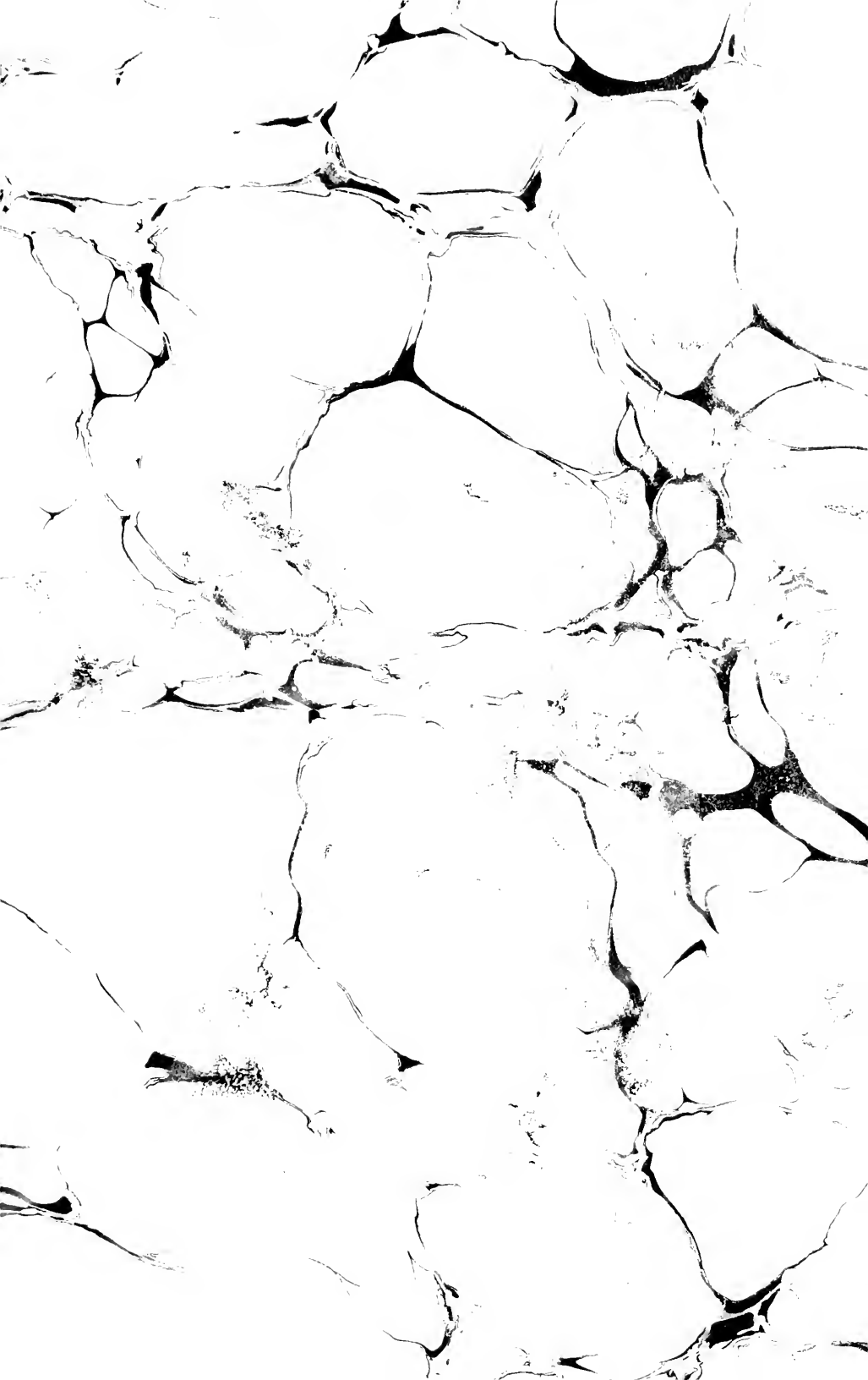


College.

Presented by Wellesley Association

In Memoriam

Nº 57474 Helen A. Snaper











# Formulaire de Mathématiques

PUBLIÉ PAR

G. P E A N O

Professeur d'Analyse infinitésimale à l'Université de Turin



PARIS,

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE

DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE.

Quai des Grands-Augustins, 55.

1901

57479

0.16.05

PROPRIETÀ LETTERARIA

---

Stampato coi tipi della « Rivista di Matematica »  
dalla Tip. P. Gerbone - Torino.

## P R É F A C E

Bien que l'histoire de chaque symbole mathématique soit contenue dans le Formulaire, nous pouvons ici la résumer en quelques mots.

Selon l'ordre chronologique, les premiers symboles sont les chiffres 0, 1, 2,... dont l'origine est très ancienne.

Suivent les symboles des opérations arithmétiques  $+$ ,  $-$  (a.1500),  $\times$  (a.1600).... les relations  $=$  (a.1550),  $>$  (a.1650), les nombres  $e$ ,  $\pi$  (a.1700).... Pendant le dernier siècle les symboles  $\Sigma$ ,  $II$ ,  $\lim$ ,  $\text{mod}$ ,  $\text{sgn}$ ,  $E$ .... ont pénétré dans l'usage commun.

Ces symboles permettent d'exprimer complètement quelques propositions :

$$2+3=5 \quad 2 < e < 3 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e \quad \int_0^{\pi} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}$$

etc. En général on s'en sert pour exprimer les parties d'une proposition, lesquelles doivent être accompagnées du langage ordinaire pour former des propositions complètes.

La partie réservée au langage ordinaire, plus petite dans quelques travaux d'Analyse, était encore grande dans les ouvrages géométriques. Le calcul barycentrique de MÖBIUS, la science de l'extension de GRASSMANN, les quaternions de HAMILTON, pour ne citer que les théories principales, permettent maintenant d'opérer sur les objets géométriques comme on opère en Algèbre sur les nombres (voir le § des vecteurs).

La Logique mathématique à son tour étudie les propriétés des opérations et des relations logiques, qu'elle indique par des symboles.

Quelques principes de cette science se rencontrent dans la Logique générale (voir Aristote). Son vrai fondateur est LEIBNIZ, qui a énoncé les principales propriétés des idées représentées maintenant par les signes  $\wedge$ ,  $\vee$ ,  $-$ ,  $=$ ,  $\supset$ ,  $\wedge$ .

Le but des recherches de LEIBNIZ était de créer une manière de « Spécieuse Générale, où toutes les vérités de raison seroient

réduites à une façon de calcul. Ce pourroit être en mêmes tems une manière de Langue ou d'Écriture universelle, mais infiniment différente de toutes celles qu'on a projetées jusqu'ici ; car les caractères, et les paroles mêmes, y dirigeroient la Raison ; et les erreurs excepté celles de fait, n'y seroient que des erreurs de calcul. Il seroit très difficile de former ou d'inventer cette langue ou caractéristique ; mais très aisé de l'apprendre sans aucuns dictionnaires » (p. 701 des *Opera philosophica*, a. 1840).

Il énonce ce projet dans son premier travail, ou, comme il l'appelle, dans son « essai d'écolier » intitulé « de arte combinatoria a.1666 ». Dans l'« *Historia et commentatio linguae charactericae universalis, quae simul sit ars inveniendi et judicandi* » (ib. p. 162), il dit que ces pensées « *semper altissime infixae menti haesere* ». Il fixe le temps nécessaire à la former : « *aliquot selectos homines rem intra quinquennium absolvere posse puto* ». Il ajoute enfin « *Itaque repeto, quod saepe dixi, hominem, qui neque Propheta sit neque Princeps, majus aliquid generis humani bono, nec divinae gloriae accomodatius suscipere nunquam posse* ».

Dans ses dernières lettres il regrette « que si j'avois été moins distrait, ou si j'étois plus jeune, ou assisté par des jeunes gens bien disposés, j'espérerois donner une manière de » cette spécieuse (pag. 701). Il dit aussi (pag. 703) « J'ai parlé de ma spécieuse générale à Mr. le Marquis de l'Hospital, et à d'autres ; mais ils n'y ont point donné plus d'attention que si je leur avois conté un songe. Il faudroit que je l'appuyasse par quelque usage palpable ; mais pour cet effet il faudroit fabriquer une partie au moins de ma Caractéristique ; ce qui n'est pas aisé, surtout dans l'état où je suis ».

LEIBNIZ n'a pas publié, de son vivant, les résultats incomplets qu'il avait obtenus. ERDMANN, a.1840 a commencé la publication des manuscrits sur ce sujet. L'édition de GERHARDT a.1875 est plus complète. Les plus intéressantes pièces ont été publiées récemment par M. VACCA (\*).

---

(\*) M. Couturat dans « L'Enseignement mathématique a.1900 p.409 » (G. Carré & C. Naud, Paris), annonce une nouvelle publication de ces manuscrits.

En conséquence les idées de Leibniz n'ont pas eu des continuateurs immédiats, à l'exception de LAMBERT et quelque autre, jusqu'à BOOLE, DE MORGAN a.1850, SCHRÖDER a.1877, MCCOLL a.1878, etc. qui ont retrouvé les théorèmes précédents, en ont énoncé des nouveaux, et ont développé des intéressantes théories. Voir la Bibliographie.

M. TAIT a remarqué l'analogie entre les calculs géométriques et logiques : « La similitude frappante de ces deux systèmes  
« de symboles, types de procédés qui sont au fond les mêmes,  
« nous suggère la remarque qu'après tout, il n'y a qu'une  
« science unique dans l'Analyse mathématique, ayant diverses  
« branches, mais employant dans chacune d'elles les mêmes  
« procédés. Par l'une de ses branches, cette science nous dé-  
« voile les mystères de la Géométrie de position, hors de la  
« portée du raisonnement géométrique ordinaire : par l'autre,  
« elle permet au logicien d'arriver à des vérités de déduction  
« auxquelles il n'aurait jamais pu atteindre sans le secours  
« de l'instrument des formules » (*Quaternions*, traduit par PLARR, Paris, 1882, p. 81).

Dans la publication qui sera indiquée par F1889 nous avons remarqué qu'il suffit d'ajouter les symboles  $\varepsilon$ , son inverse, et quelques autres moins importants, pour compléter l'analyse des idées de Logique qu'on rencontre dans les sciences mathématiques, et nous avons écrit entièrement en symboles quelques théories mathématiques.

L'idéographie, qui résulte de la combinaison des symboles logiques avec les algébriques, a été bientôt appliquée par divers Auteurs. Dans quelques travaux elle sert seulement à énoncer sous forme plus claire des théorèmes.

En général elle est l'instrument indispensable pour analyser les principes de l'Arithmétique et de la Géométrie, et pour y démêler les idées primitives, les dérivées, les définitions, les axiomes et les théorèmes. On s'en est aussi servi pour construire des longues suites de raisonnement, presque inabordables par le langage ordinaire.

La RdM. t.7 p.3 contient la table de 67 Mémoires publiées en différents pays par 15 Auteurs, dans lesquels on a adopté cette idéographie. Leur nombre s'est accru dans la suite.

Nous pouvons exactement dire avec LEIBNIZ :

« Itaque profertur hic calculus quidam novus et mirificus,  
 « qui in omnibus nostris ratiocinationibus locum habet, et qui  
 « non minus accurate procedit quam Arithmetica aut Algebra.  
 « Quo adhibito semper terminari possunt controversiae quantum  
 « ex datis eas determinari possibile est, manu tantum ad ca-  
 « lamum admoto, ut sufficiat duos disputantes omissis verbo-  
 « rum concertationibus sibi invicem dicere : *calcelemus*, ita  
 « enim perinde ac si duo Arithmetici disputarent de quodam  
 « calculi errore ».

Nous avons essayé de réunir en un seul volume les propositions écrites entièrement en symboles, et que nous appelons « formules ». Ainsi s'est formé le t.1 du Formulaire, publié en 1892-1895. MM. F. CASTELLANO, G. VAILATI, C. BURALI-FORTI, R. BETTAZZI, G. VIVANTI, F. GIUDICE, G. FANO y ont collaboré, ou ont réduit en symboles de nouvelles théories.

Dans le t.2 a.1897-1899 nous avons coordonné ces différentes théories, en comblant les lacunes, et en posant à la place voulue les additions proposées par MM. G. VACCA, A. PADOA, M. CHINI, et d'autres (RdM. t.6 p.65-74). L'exécution typographique de ce travail a été très laborieuse. Il exige l'exactitude d'une table de logarithmes, et est de composition beaucoup plus difficile.

Le Formulaire actuel (a.1901) contient les propositions déjà publiées dans l'édition de l'a.1899, les formules de Logique publiées dans RdM. t.7 p.1-41, les propositions nouvelles réduites en symboles par MM. :

M. NASSÒ (RdM. t.7 p.42-55)

F. CASTELLANO (id. p.58)

G. VACCA (id. p.59-66)

M. CHINI (id. p.66)

T. BOGGIO (id. p.70-72, et d'autres non publiées)



et les additions et les corrections indiquées par MM. G. ENESTRÖM (id. p.66), VIVANTI, CIAMBERLINI, PADOA, RAMORINO, BÜHL, et plusieurs autres.

M. VACCA a ajouté les indications historiques aux P :

§D 9 §+ 4.3 §N 5.5 15.61 §! 1.2 7.6 §Chr 4 §Np 3.3.1 9.1.62  
 §Nprf 3 §cont 3.4 §D 4.4 20.5 §Dtrm 1.1 §7 1.82 3.1 3.7 12.1  
 §sin 4.1.5 5.1 10.1 13.2 14.2 16.1-3 §B 1.11-21.8 §vet 33.6.61 31.1-2.6.8

et beaucoup d'autres indications bibliographiques ; il nous a de nouveau puissamment aidé dans tout ce travail.

Nous avons complété quelques théories, notamment sur les dérivées, sur les intégrales, et sur les nombres complexes.

Les symboles conservent ici la forme commune, lorsqu'il est possible: ex:  $+$ ,  $-$ ,  $\times$ ,  $>$ ,  $=$ ,  $0$ ,  $1$ ,  $2$ , ...  $\log$ ,  $\sin$ ,  $e$ ,  $\pi$  ... Lorsqu'il y a plusieurs notations en usage, nous avons adopté la plus ancienne, ou la plus répandue. Lorsque nous avons dû introduire un symbole nouveau, nous avons pris le mot du langage ordinaire, plus ou moins abrégé: ex: pnt, vet, quot, rest, ...

Les mots du langage mathématique commun montent à plusieurs milliers (voir p.213). Il ne convient pas de les ériger tous en symboles ; ils s'expriment ici par environ 100 symboles.

Dans le langage ordinaire, on a plusieurs formes pour représenter une même idée indiquée ici par un symbole seul. Nous donnons à chaque symbole un nom ; mais il convient de lire les symboles, et les ensembles de symboles, sous une forme qui s'approche du langage ordinaire. Un peu d'exercice permet de lire les formules sous la forme habituelle.

Le Formulaire est toujours en construction. Nous continuerons à publier dans la RdM. les nouvelles propositions exprimées entièrement en symboles par les collaborateurs, les corrections et les indications historiques qu'on nous enverra, pour en tenir compte dans une nouvelle édition.

Le Formulaire est divisé en §§. Chaque § a pour titre un signe idéographique. Ces signes se suivent dans un ordre tel que tout signe résulte défini par les précédents (à l'exception des idées primitives).

## VIII

Un § quelconque contient les propositions qu'on exprime par le signe du § et par les précédents. Ces derniers servent à classer les propositions d'un §.

En conséquence, on trouvera ici la place d'une proposition, déjà écrite en symboles, à peu près comme on trouve la place d'un mot dans un dictionnaire.

Toute proposition est indiquée par un nombre qui a une partie entière et une décimale, dans le but de faciliter l'interpolation.

Le signe  $\ast$  indique le changement de la partie entière.

Turin, 1. I. 1901.

G. PEANO.

# FORMULAIRE DE MATHÉMATIQUES

## PREMIÈRE PARTIE

### LOGIQUE MATHÉMATIQUE

#### §1 Cls $\varepsilon x : \supset \wedge =$

#### \* 1. *Notations*

- 1 Les lettres  $a, b, \dots, z, a', \dots$  désignent des objets quelconques.
  - 2 On divise une formule en parties par des parenthèses  $()$ ,  $[]$ ,  $\{\}$  ou par des points.
  - 3 « Cls » signifie « classe ».
  - 4 Soit  $a$  une Cls;  $xa$  signifie «  $x$  est un  $a$  ».
  - 5 Soit  $p$  une proposition contenant une lettre  $x$ ;  $x\exists p$  représente « la classe des  $x$  qui satisfont à la condition  $p$  ».
  - 6  $(x;y)$  ou  $(x,y)$  indique le couple, ou système des objets  $x$  et  $y$ .
  - 7 Soient  $a$  et  $b$  des Cls,  $a \supset b$  signifie « tout  $a$  est  $b$  ».
- Soient  $p$  et  $q$  des propositions contenant une variable  $x$ ;

$$p \cdot \supset_{x \cdot} q,$$

signifie « de  $p$  on déduit, quel que soit  $x$ , la  $q$  », c'est-à-dire : « les  $x$  qui satisfont à la condition  $p$  satisferont aussi à la  $q$  », ou

$$(x\exists p) \supset (x\exists q)$$

Si les propositions  $p$  et  $q$  contiennent deux variables  $x, y$ ,

$$p \cdot \supset_{x,y \cdot} q$$

signifie : « tout système  $x,y$  qui satisfait à la condition  $p$  est aussi une solution de la condition  $q$  », ou  $(x;y\exists p) \supset (x;y\exists q)$ .

Et ainsi de suite pour un plus grand nombre de variables.

On sous-entend les indices au signe  $\supset$ , lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté à craindre.

\*8  $a \frown b$  ou  $ab$  indique la Cls commune aux Cls  $a$  et  $b$ .

L'affirmation simultanée des propositions  $p$  et  $q$  est indiquée par  $p \frown q$ , ou par  $pq$ .

Pour supprimer des parenthèses on convient que :

$pq \supset r$  signifie  $(pq) \supset r$ , et  $p \supset qr$  signifie  $p \supset (qr)$ .

$p \cdot \supset q$  et  $p \supset \cdot q$  signifient  $p \cdot \supset q$ .

\*9  $x=y$  signifie " $x$  est égal à  $y$ ".

### Notes.

\*1. Les lettres variables, dans le Form., sont toujours en *italique*.

Les signes ayant une signification constante ont une forme spéciale:  $\supset = + - \times \dots$ , ou bien sont indiqués par des lettres grecques  $\varepsilon$   $\iota$   $\Sigma$ , ou par des lettres romaines: Cls log mod ...

On rencontre les lettres variables dans Aristote pour représenter les idées de Logique (V. P44); elles sont d'un usage commun chez Euclide pour indiquer des points, des lignes, des nombres, etc. (V. § (P14).

Dans ces notes nous dirons qu'une lettre est *réelle* dans une formule, lorsque la valeur de la formule dépend du nom de la lettre; dans le cas contraire la lettre est *apparente*.

P signifie « proposition ». Ce signe n'est pas un symbole de logique, car il ne se trouve pas dans les formules; c'est une simple abréviation.

Une P (proposition) ne contenant pas de lettres variables réelles est dite *catégorique*. Sont telles les théorèmes et les définitions; toutes les lettres qui y figurent sont apparentes.

Les P catégoriques ne sont pas l'objet du calcul logique.

Une P contenant des variables réelles est dite *conditionnelle*.

P. ex. la P: soient  $a$  et  $b$  des nombres; on a  $ab = ba$  est catégorique. La P:  $ab = ba$

est conditionnelle; elle est satisfaite si  $a$  et  $b$  sont des nombres; elle ne l'est pas s'ils sont des nombres complexes d'ordre supérieur, par ex. des quaternions; elle n'a pas de signification si  $a$  et  $b$  sont des objets dont on n'a pas défini le produit.

À propos des signes  $\varepsilon \supset \mid$  nous donnerons les règles pour reconnaître, à la position, les variables apparentes.

Dans le langage commun les mots « ceci, cela, le même, premier, deuxième, ... » jouent le rôle des lettres variables. On pourrait les remplacer par les nombres 1, 2, ... en faisant des conventions opportunes pour ne pas produire des ambiguïtés dans l'Arithmétique. Voir F1897 p.26.

\*2. On écrit un point là où l'on fait la division. Si à cette place on a déjà un point, on écrira un nouveau point, et ainsi de suite. Si  $a, b, c, \dots$  désignent des signes quelconques, les groupements:

$a, bc$        $ab, c$        $ab, cd$        $a, bc, d$        $ab, cd, e, fg, h, k, l$   
 seront identiques à  
 $a(bc)$        $(ab)c$        $(ab)(cd)$        $a[(bc)d]$        $[(ab)(cd)][e(fg)][(hk)l]$

Nous donnons la préférence aux parenthèses dans les formules algébriques et dans les formules composées comme les algébriques, et aux points pour séparer les propositions partielles d'un théorème; car dans ce cas les parenthèses seraient absolument encombrantes.

Pendant longtemps on a indiqué le groupement des parties d'une formule par une barre horizontale supérieure ou inférieure, dite *vinculum* (Chuquet, Leibniz, ...). Selon cette convention les groupements précédents seront indiqués par

$\underline{abc}$        $\underline{ab}c$        $\underline{ab}cd$        $\underline{ab}cd$        $\underline{\underline{abc}}\underline{\underline{d}}\underline{\underline{efg}}\underline{\underline{hkl}}$

Cette convention, très claire, présente quelque difficulté typographique. Elle ne se rencontre plus aujourd'hui que dans les fractions et les racines.

Si l'on complète les vinculums, en les écrivant aussi sous une lettre seule, on voit qu'il y a autant de points que d'espaces vides dans les vinculums; les points sont les compléments des vinculums.

La suite de trois lettres peut être décomposée dans les deux formes écrites: la suite de quatre lettres  $abcd$  dans les 5 formes:

$a : bc, d$      $a : b, cd$      $ab, cd$      $a, bc : d$      $ab, c : d,$

et en général la suite de  $n$  lettres peut être décomposée en  $2n !/[n!(n+1)!]$  combinaisons binaires différentes. F1894 §10.

Plusieurs conventions ont pour but de supprimer des divisions: P5:0, 9:1, §P1:1, §- P1:2-4, §§ P1:01, §+ P5:2, §- P1:02 ...

Pour les faire mieux ressortir, nous donnerons aux signes des dimensions différentes, et nous nous aiderons des espaces typographiques.

Les parenthèses et les points sont des signes de l'écriture commune, bien que l'usage soit différent: dans les langages ordinaires le groupement des mots est indiqué par la construction.

Les symboles du Formul. ont une signification constante. En adoptant les parenthèses pour grouper les parties d'une formule, on ne pourra pas les adopter dans une autre signification. Nous ne pourrions pas indiquer par  $a$ ) une puissance de  $a$ , avec Girard a.1629 voir §Q P53m), ou la partie entière de  $a$ , ou la valeur absolue de  $a$ , ou une fonction de  $a$ . En général une lettre seule ne sera jamais renfermée entre parenthèses, car elle n'est pas groupée.

3. Le symbole Cls a la forme K dans F1889 et dans les travaux de plusieurs Auteurs. Il a la valeur du mot *ἄρος* d'Aristote, terminus des scolastiques; et correspond aussi à idée générale, nom commun, ... du langage ordinaire, et aux expressions ensemble, Menge des mathématiciens.

Leibniz prend pour exemples les classes de points, ou figures: ce sont des segments de droite dans Phil8, t.7, p.229, 236, ... et des cercles dans ses manuscrits conservés à la bibliothèque de Hannover, *Philosophie*, t.7 fasc. B.4, fol.1-3.

Ces figures ont été aussi adoptées par Euler, a.1768, et par d'autres.  
 Dans l'Arithmétique les symboles suivants représentent des Cls :

$N$  ou  $N_1$  = « nombre entier positif »

$Np$  = « nombre premier »

et par une convention générale :

$a+N$  = «  $a$  plus un  $N$  » ou « nombre plus grand que  $a$  »

$a \times N$  =  $N \times a$  = « multiple de  $a$  »

$N^2$  = « nombre carré »

$N^2+N^3$  = « somme de deux carrés ».

Dans le F, les symboles simples  $n$   $R$   $r$   $\text{infin}$   $\vartheta$   $Q$   $q$   $\theta$   $\Theta$  pnt vet quaternio indiquent aussi des Cls.

Les signes 0 1 2 ...  $X$   $e$   $\pi$   $C$   $i$  désignent des individus. Sur la relation entre individus et classes, voir §4.

4.  $\varepsilon$  est la lettre initiale du mot *écrit*.

Exemples :  $9 \varepsilon N^2$   $13 \varepsilon N^2+N^3$   $2^{61}-1 \varepsilon Np$

Sur la possibilité de remplacer le signe  $\varepsilon$  par une autre convention voir F1897 note à la P2.

5. On peut lire le signe  $\varepsilon$  par le mot « qui ».

Exemple :  $1 \varepsilon x\varepsilon x^2-3x+2=0$

« l'unité est une racine de l'équation entre parenthèses ».

Autres ex. :

$\S \text{not P1} \cdot 0$   $\S \text{Dvr P1} \cdot 0$   $\S \text{mp P2} \cdot 6$   $\S \vartheta \text{P} \cdot 0$   $\S \text{Med P1} \cdot 0$   $\S \text{z P1} \cdot 0$   $\S q' \text{P4} \cdot 0 \dots$

Dans la formule  $x\varepsilon p$ , la lettre  $x$  est apparente.

Les deux signes  $x\varepsilon$  et  $x\varepsilon$  représentent des opérations inverses.

Si l'on écrit le signe  $x\varepsilon$  en avant d'une Cls, on a une P {contenant la variable  $x$ ; réciproquement si l'on écrit le signe  $x\varepsilon$  en avant d'une P de cette nature, on obtient une Cls.

Les Cls et les P conditionnelles ne sont donc que deux formes pour représenter la même idée. Nous préférons opérer sur les Cls. Une P conditionnelle, contenant une variable  $x$ , sera considérée sous la forme  $x\varepsilon a$ , où  $a$  est une Cls.

6. Dans la notation  $(x,y)$ , très répandue en Analyse lorsqu'il s'agit de fonctions de plusieurs variables, les parenthèses sont nécessaires, pour ne pas produire des ambiguïtés avec la notation P4.0.

On peut les supprimer dans la notation  $(x;y)$ , où les parenthèses ont la valeur expliquée par la P1.2.

$x;y;z$  indique le système des trois variables  $x$ ,  $y$ ,  $z$ , qu'on peut considérer comme le couple formé par  $(x;y)$  et  $z$ . Voir P9.1.

Soit  $p$  une P contenant deux variables  $x$  et  $y$ ;  $(x;y)\varepsilon p$  représente la classe des couples  $(x;y)$  qui satisfont à la condition  $p$ .

Si  $a$  est une Cls de couples,  $(x;y)\varepsilon a$  représente une relation entre les deux objets  $x$  et  $y$ , et toute relation entre les deux variables sera ici écrite sous la forme  $(x;y)\varepsilon a$ .

Ex :  $(3/5; 4/5) \varepsilon (x;y)\varepsilon x^2+y^2=1$

signifie « le couple  $[3/5; 4/5]$  satisfait à l'équation  $x^2+y^2=1$  ».

7. La P  $a \supset b$ , qu'on peut aussi lire « la classe  $a$  est contenue dans la  $b$  » est dite « universelle affirmative ».

Aristote a exprimé la relation  $a \supset b$  par une périphrase (Voir P4-4); Leibniz par «  $a$  est  $b$  », et par  $a \mid b$ . Segner a. 1710 et Lambert a. 1765 respectivement par  $a < b$  et  $a > b$ ; car le signe  $\supset$  correspond au signe  $<$  ou  $>$ , ou mieux à  $\leq$  ou  $\geq$ , de l'Algèbre, selon que dans la classe on considère le nombre des individus qui la composent, ou le nombre des idées qui la déterminent.

Le signe  $\supset$ , qu'on peut lire « est contenu », est une déformation de  $\supset$ , lettre initiale renversée du mot « contient ».

Il a été introduit par Gergonne a.1816. Voir RdM. t.6 p.183.

Les signes  $\varepsilon$  et  $\supset$  ont des propriétés différentes; la relation  $\supset$  est transitive, la  $\varepsilon$  ne l'est pas (P4-1); la  $\varepsilon$  est distributive par rapport à  $\vee$ , la  $\supset$  ne l'est pas (§4 P4-0); la  $\varepsilon$  est commutative avec  $-$ , la  $\supset$  ne l'est pas (§- P1-5). Une autre différence est donnée par §4 P1-1. Les signes  $\varepsilon$  et  $\supset$  sont liés par des relations, dont la plus importante est §1 P-2.

Dans la formule  $p \supset q$ ,  $p$  s'appelle Hypothèse, abrégé en Hyp ou Hp, et  $q$  la thèse, abrégé en Ths.

On sous-entend les indices à  $\supset$ , lorsqu'il est le seul signe de déduction; ou lorsqu'il représente la déduction principale, qui porte le plus grand nombre de points à ses côtés; ou si le théorème a la forme  $p \supset q \supset r$ . Les indices sous-entendus sont toutes les variables réelles contenues dans l'Hp.

Les lettres qui, exprimées ou sous-entendues, figurent comme indices au signe  $\supset$  sont apparentes dans la déduction.

Opérer par  $x\varepsilon$  sur la P universelle  $a \supset b$   
signifie la transformer dans la déduction  $x\varepsilon a \supset_x x\varepsilon b$   
« de la condition  $x\varepsilon a$  on déduit par rapport à  $\omega$  la  $x\varepsilon b$  ».

Opérer par  $x\varepsilon$  sur la déduction  $p \supset_x q$   
signifie la transformer dans la P universelle  $(x\varepsilon p) \supset x\varepsilon q$

Ex.  $6N \supset 2N$  « tout multiple de 6 est pair ».

Opérons par  $x\varepsilon$ ; on a :  $x\varepsilon 6N \supset_x x\varepsilon 2N$ ,  
où l'indice  $x$  au signe  $\supset$  est sous-entendu.

Ex.  $a \varepsilon Np \supset (a-1 !+1 \varepsilon N \supset a$

Le signe  $\supset$  se rencontre aussi entre P, sans porter des indices : P7-01.

Quelquefois, dans les démonstrations, le signe  $\supset$  lie deux théorèmes, et ne porte pas d'indices. C'est alors une abréviation du mot « on déduit ». Cette abréviation se rencontre sous la forme  $\supset$  dans Pe11 (v. RdM. t.6 p.123), et sous la forme  $\supset$  dans Abel t.1 p.36. Dans ce cas on peut considérer les signes des idées primitives comme indices à  $\supset$ .

Dans le F, lorsqu'on rencontre l'expression  $x\varepsilon a$ ,  $a$  est toujours une Cls. Analogiquement dans la formule  $a \supset b$ , si un membre est une Cls, l'autre l'est aussi. On pourrait remplacer la P-4 par «  $x\varepsilon a$  signifie  $a$  est une Cls, et  $x$  est un  $a$  », c'est-à-dire ajouter la P :  $x\varepsilon a \supset_x a \varepsilon \text{ Cls}$  (F1889P52).

Voir Padoa RdM. t.6 p.105.

8. Le signe  $\wedge$ , qu'on peut lire « et », et qu'on appelle signe de la multiplication logique, est en général sous-entendu entre des P.

$$\text{Ex.} \quad (2N \wedge (3N) \supset 6N) \quad 6N \supset (2N) \wedge (3N)$$

$$Np \wedge (N+1) \supset N^2 + N^2 \quad \text{Girard a. 1634 p. 156 :}$$

« Tout nombre premier qui excède un nombre quaternaire de l'unité se peut diviser en deux quarez entiers. »

$$a \in N \supset, a \cdot a + 1 \in 2N \supset, a(a+1) \cdot (a+2) \in 6N$$

$$a \in N \supset, a^2 \in N^3 \supset, a \in N^3 \supset, a \in N \supset, a < 17 \supset, a^2 - a + 17 \in Np$$

Dans ces ex. l'indice  $a$  au signe  $\supset$  est sous-entendu.

$$a \in Np \supset, b \in N+1 \supset, b^{a-1} - b \in N \wedge a \quad \} \text{Fermat \{}$$

Ici le signe  $\supset$  porte les indices sous-entendus  $a$  et  $b$ .

Ex. où  $\supset$  a des indices explicites :

$$s \in \text{Cls} \supset, 1 \in s \supset, a \in s \supset, a \cdot a + 1 \in s \supset, N \supset s \quad (\text{principe d'induction})$$

$$\S + 4 \cdot 3 \quad \S - 3 \cdot 2 \quad 4 \cdot 0 \quad \S / 3 \cdot 2 \quad 5 \cdot 0 \quad 32 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 9 \quad \S \text{Num} \cdot 23 \cdot 24 \quad \S \text{mt} 1 \cdot 0 \quad \S \text{mp} 1 \cdot 5 \dots$$

9. Le signe d'égalité a la forme  $\propto$  ou  $\infty$ , déformation de la lettre initiale de *aqualis*, de Viète à Leibniz ; la forme  $\equiv$  de Recorde a. 1557, (*The Whetstone of wille or the second part of arithmetike*) a été probablement empruntée aux Mss. du moyen âge dans lesquels il signifie « est ». Voir Henry *Revue Archéologique* a. 1879 t. 38 p. 5. Cette forme adoptée par Wallis et Newton, est devenue ensuite d'usage universel.

La plus grande partie des propositions contenues dans le Formul. s'exprime par les seuls signes de logique  $\in$ ,  $\supset$ , et  $\wedge$  (sous-entendu), combinés avec les signes algébriques.

Le symbole Cls nous est nécessaire dans les propositions de Logique ; le signe  $\in$  nous explique le double rôle du signe  $\supset$  entre classes et entre propositions ; le système de variables se rencontre comme indice au signe  $\supset$ .

## \* 2. Définitions

Df signifie « définition ».

Dfp » » « définition possible ».

Une Dfp est une égalité qui contient dans un membre un signe qui ne figure pas dans l'autre, ou qui y figure dans une position différente. Nous la dirons aussi « possible absolument ».

Si les deux membres contiennent des lettres variables, et s'il faut limiter la signification de lettres, l'égalité suit une Hp.

Supposons ordonnés les signes qui représentent les idées d'une science.

Une Df possible absolument d'un signe, sera aussi possible relativement à l'ordre fixé, si elle exprime le signe par les précédents.



Dans ce cas, on peut la prendre comme Df du signe. S'il y a plusieurs définitions possibles du signe, relativement à l'ordre fixé, on choisira la plus commode comme définition réelle.

Une idée, qui n'a pas de définition possible, relativement à un ordre fixé, s'appelle « idée primitive » relativement à cet ordre.

Il convient de donner aux idées d'une science un ordre tel que le nombre des idées primitives soit le plus petit.

Les idées primitives sont ici expliquées par le langage ordinaire, et sont déterminées par des Pp (P primitives); celles-ci jouent le rôle de définitions par rapport aux idées primitives, mais n'en ont pas la forme.

Une définition est vraie par convention. Sa raison d'être est un fait historique, ou la volonté de l'Auteur. On ne peut pas en donner une démonstration mathématique.

Toute définition doit être « homogène », c'est-à-dire :

a) Les deux membres de l'égalité qui constitue la Df doivent contenir les mêmes variables réelles :

b) Si l'on définit une fonction nouvelle de fonctions connues des lettres, le second membre doit contenir seulement les dernières fonctions.

Tout signe ou mot rigoureusement défini peut être supprimé en le remplaçant par sa valeur; autrement dit, toute Df exprime une abréviation théoriquement non nécessaire, mais commode, et quelquefois pratiquement nécessaire pour le progrès de la science. Cette suppression d'un signe défini est un exercice très utile à faire, dans quelques propositions, à fin de vérifier si les définitions sont justes.

Si l'on n'arrive pas à remplacer partout le signe défini par sa valeur, on déduit que la définition n'est pas énoncée en forme exacte.

P. ex. sont des Dfp du nombre  $\pi$  les §s P1-0-01-03-61-2-2, et aussi la 1-62 un peu transformée; aucune autre P du même § n'a le caractère de Dfp.

Dans le F nous désignerons par Dfp seulement celles qu'on pourrait prendre commodément comme Df.

Sont sans Hp les Df des individus :  $1\ 2\ 3\ \dots\ \infty \in U \text{ à } \pi,$

et des Cls :  $N_1 \text{ n } R \text{ r } \text{ infn } Np \neq Q \text{ q } q'.$

Ont une Hp les Df de  $+$   $>$   $-$   $<$   $/$   $\uparrow$  Num  $\Sigma$   $\Pi$  ! C mod max quot rest E  $\beta$  Dvr mlt mp  $\Phi$  P Log Med  $\lambda$  lin D f sin ...

Ex. de Dfp : §+ 8·6 §> 2·4·7 §— 7·7 §× 2·0 §/ 3·01 15·01 32·5·9...

Quel que soit l'ordre fixé, il y a nécessairement des idées primitives, car on ne peut pas définir la première idée, ni le signe  $=$ , qui figure dans toute définition.

Si l'on change l'ordre des idées d'une science, une P qui jouait le rôle de Df peut se transformer en une Dfp; une idée, qui était primitive relativement au premier ordre, peut être définie, et réciproquement.

Pa dca, dans sa conférence au congrès international de Philosophie (Paris 3 Août a.1900), a proposé des règles pour reconnaître l'irréductibilité d'un système de symboles par rapport à un système de Pp.

Nous rencontrons trois idées primitives dans l'Arithmétique (§+P1); et trois dans la Géométrie (§vet P1·0, 2·0 et 8·0).

Plusieurs A. appellent « définitions » des P qui n'ont pas la forme de nos « Df », lesquelles sont alors dites « définitions nominales ». Selon d'autres, « Definitio » est le second membre de l'égalité, dont le premier est le signe qu'on définit.

Une Df doit être une P complète, intelligible même détachée du texte. Quelques A. appellent « définition » la formule qui figure dans la P, et qui est une partie de la Df; alors il y a la crainte que l'idée qu'on veut définir se rencontre déjà dans les Hp, ou dans les parties non écrites; ce qui peut arriver notamment en Logique pure.

P. ex. la P incomplète  $a-a=0$  n'est pas une Dfp.

La §-P1·41 :  $a \in N \supset a-a=0$  est une P complète, vraie, et non une Dfp, car un membre contient la variable réelle  $a$ , qui ne figure pas dans l'autre.

Si l'on considère comme une bonne Df la P citée, il faudrait aussi considérer comme telle la P  $a, b \in N \supset a-b=1$ , qui a la même forme, et qui, étant fausse, serait vraie par définition.

La P (§vet 3·1) :  $0=$  « valeur constante de  $a-a$ , où  $a \in N$ , ou un vet, » est une Dfp. La lettre  $a$  dans le second membre est apparente.

Les §/ P5·2, 12·2 sont des égalités qui contiennent dans les deux membres es mêmes lettres réelles; on ne peut pas les prendre comme Df de la somme et du produit de deux R; car si  $a, b, c, d \in N$ , la somme  $(a/b) + (c/d)$  doit être définie comme fonction de  $a/b$  et de  $c/d$ , et non de  $a, b, c, d$ . Le rapport  $a/b$  est fonction de  $a$  et  $b$ , mais non réciproquement.

P. ex. on ne peut pas définir une opération  $\mu$  moyen par la P :

$$a, b, c, d \in N \supset a/b \mu c/d = a+c/b+d, \text{ car on déduirait : } 1/2 \mu 2/3 = 3/5; \quad 2/4 \mu 2/3 = 4/7, \text{ d'où l'absurdité } 3/5 = 4/7.$$

Analoguement les §Num 51·61 ne sont pas des Dfp.

Présentent quelques difficultés les définitions « par abstraction », où l'on définit l'égalité de la même fonction de deux variables, sans définir cette fonction. Ont cette forme les §Num 10, §/ 2·0 §vet 7·1.

Ex. de Df « par induction » : §+ 3·1·2, 10·1·2, Df $\times$ , Df $\Sigma$ .

Ex. de Df où les deux membres sont connus : §-P2·4, §Subst 1·4.

✱ 3.

*Démonstrations*

Dem ou Dm signifie « démonstration ». En général les démonstrations sont renfermées entre [ ].

En supposant ordonnées les P d'une science, une Dm doit déduire une P des précédentes. Une P peut avoir plusieurs démonstrations; il peut arriver que l'on puisse déduire une P d'autres qui la suivent; on pourrait appeler « démonstrations possibles » ces déductions; elles deviennent des démonstrations si l'on change l'ordre des P. Ex.: § P2.6, § 761.

Les P dont la Dm manque, s'appellent Pp (propositions primitives). Si dans une science il y a des idées primitives, il y aura aussi des Pp, qui fixent la valeur des premières.

Une P est primitive, si l'on ne l'a pas démontrée. Dans plusieurs cas on prouve qu'un système de  $n$  Pp est irréductible; pour ce but on donne aux idées primitives  $n$  interprétations différentes de la réelle, et telles que chacune satisfasse à toutes les Pp, une à la fois exceptée. Voir §+.

Dans quelque cas on prouve seulement que chaque Pp est indépendante des précédentes; on en prouve « l'indépendance ordonnée ». Voir § vet.

Les démonstrations, dans les sciences mathématiques, sont composées d'une suite de propositions convenablement liées.

Ces P ne diffèrent des théorèmes que par leur moindre importance. Nous pouvons donc les exprimer complètement en symboles.

La liaison entre les P est indiquée dans le langage ordinaire par « on déduit », que nous traduirons par  $\supset$ . C'est une forme de raisonnement.

Les lois de logique, contenues dans la suite, ont été en général trouvées en énonçant, sous forme de règles, les déductions qu'on rencontre dans les démonstrations mathématiques.

Parmi les règles plus importantes il y a le syllogisme, la composition, l'exportation, l'importation, la substitution, et la simplification.

Soient  $p, q, r, s$  des propositions.

1. Syll, abréviation de Syllogisme, indique la forme

$$p \supset q \cdot q \supset r \cdot \supset \cdot p \supset r.$$

Si les propositions sont réduites à la forme  $x\epsilon a$ , où  $a$  est une Cls, le syllogisme s'exprime par la P4.4. Mais nous appliquerons le Syll même lorsqu'il s'agit de P non encore réduites à la forme  $x\epsilon a$ .

·2. Cmp (composer) indique la forme

$$p \supset q \cdot p \supset r \cdot \supset \cdot p \supset q r \cdot$$

Voir P5·4. En combinant les raisonnements Cmp et Syll, on a la forme :

$$P5·61 \quad p \supset q \cdot p \supset r \cdot q r \supset s \cdot \supset \cdot p \supset s \cdot$$

·3. Importer signifie passer de la proposition  $p \supset q \supset r$  à la  $p q \supset r$ .

En réunissant les hypothèses, on réunit aussi les indices au signe  $\supset$ .

·4. Exporter indique la transformation inverse. Voir P9·3.

Par ex. soit la P :  $a \in N \cdot b \in N \times a \cdot c \in N \times b \cdot \supset \cdot c \in N \times a$

où le signe  $\supset$  porte les indices sous-entendus  $a, b, c$ .

Export  $\supset$  :  $a \in N \cdot b \in N \times a \cdot \supset \cdot c \in N \times b \cdot \supset \cdot c \in N \times a$

Opérons par  $c \ni$  :  $a \in N \cdot b \in N \times a \cdot \supset \cdot N \times b \supset N \times a$ .

·5. La substitution consiste à remplacer dans un théorème  $a$  de la forme  $p \supset x, y, \dots, q$ , les lettres variables  $x, y, \dots$  par des expressions constantes ou variables  $a, b, \dots$  ; on désigne par

$$(a, b, \dots) | (x, y, \dots) Pa$$

la nouvelle P. Le signe  $|$  sera étudié dans son §.

·6. Toute P doit être écrite sous sa forme la plus simple. Si l'on effectue une substitution dans une P, il peut arriver que la nouvelle P ne se présente pas sous la forme la plus simple ; il faut la simplifier comme suit :

a) Si l'Hp ne contient plus de lettres variables, et si elle est vraie, on la supprime, et l'on affirme la Ths. Voir P4·3.

P. ex. soit la P  $x \in N p \cdot \supset \cdot (x-1)! + 1 \in N \times x$  (a)

$$(1 | x) Pa : \supset \cdot 1! \in N p \cdot \supset \cdot 10! + 1 \in N \times 11$$

$$\text{Simplif } \supset \cdot 10! + 1 \in N \times 11.$$

b) Si dans l'Hp il y a comme facteur logique une P vraie, on la supprime. Ex. De la P :

$$a, b \in N \cdot \supset \cdot (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \quad (a)$$

$$(1 | b) Pa \cdot \text{Simplif } \supset \cdot a \in N \cdot \supset \cdot (a+1)^2 = a^2 + 2a + 1.$$

Si l'on exporte la P vraie, la règle b) est conséquence de la règle a).

c) Réciproquement on peut unir à l'Hp des P vraies.

Soit  $a$  un théorème :  $Hp \cdot a \cdot \supset \cdot$  Ths est donc une forme abrégée de  $a \cdot \supset \cdot Hp \cdot \supset \cdot$  Ths.

d) Si dans l'Hp il y a comme facteur logique une P conséquence des autres, on la supprime.

e) Si dans l'Hp il y a un facteur logique non nécessaire, on le supprime.

f) Réciproquement on peut ajouter à l'Hp des facteurs non nécessaires ; cela revient à dire que de l'affirmation simultanée de plusieurs propositions, on peut déduire l'affirmation de chaque proposition. Voir P5·3.

D'autres formes de raisonnement seront indiquées par un nom :

Distrib(ε, ∧)	Oper ∧	Comm ∧	Assoc ∧	Distrib(⊃, ∧)	Distrib(ε, ∧)
P5·1	5·5	6·2	6·3	7·3	8·2
istrib(ε, ∨)	Oper ∨	Comm ∨	Assoc ∨	Distrib(∧, ∨)	Distrib(ε, ∨)D
§ 4·0	1·5	2·2	2·3	3·1	4·1
Trausp		Oper ∫	Eliminer.		
§- 2·3·4 3·7·71 4·2		§ 1·21	2·1		

Les P de logique sont en général évidentes. Les démonstrations n'ont pas pour but de nous assurer de la vérité de ces P, mais seulement de réduire plusieurs de ces modes de raisonnement à d'autres plus simples.

Dans le Formul. une démonstration est réduite à une suite de transformations, suivant des règles mentionnées, de l'Hp dans la Ths. Ces transformations sont analogues aux règles algébriques pour résoudre un système d'équations.

La classification des propositions en primitives et en dérivées, et la démonstration de l'indépendance absolue ou ordonnée des premières, a été faite pour différentes branches, à l'aide des symboles logiques dans RdM. a.1891 p.93, a.1894 p.52, par Burali-Forti RdM. a.1893 p.79, a.1899 p.141, Padoa RdM. a.1895 p.185 note, Pieri TorinoM. a.1898 t.48 p.60, etc.

✱ 4.

⊃ ε

·0  $a \in \text{Cls} \vdash x, y \varepsilon a \equiv x \varepsilon a \vee y \varepsilon a$  Df

« Soit  $a$  une classe ; nous écrirons  $x, y \varepsilon a$ , qu'on lira «  $x$  et  $y$  sont des  $a$  », au lieu de «  $x \varepsilon a \vee y \varepsilon a$  ».

La formule  $x, y, z \varepsilon a$  signifie  $x, y \varepsilon a \vee z \varepsilon a$

«  $x$  et  $y$  sont des  $a$ ,  $z$  est un  $a$  », qu'on lira «  $x, y, z$  sont des  $a$  », et ainsi de suite quel que soit le nombre des sujets.

Ex.  $2^2-1, 2^3-1, 2^5-1 \in N_p$   
 $a, b \in N \vdash ab = ba \vee a^2 + b^2 \equiv 2ab$

·1  $a, b \in \text{Cls} \vdash a \supset b \equiv x \varepsilon a \vdash x \varepsilon b$  Dfp { F1889 P50 {  
 { Oper  $x \varepsilon$  { { Oper  $x \varepsilon$  {

Cette P relie les deux fonctions du signe  $\supset$  entre Cls et entre P, et exprime les règles « opérer par  $x \varepsilon$ , ou par  $x \varepsilon$  ». Voir P1·7.

Si l'on considère le signe  $\supset$  entre P comme une idée primitive, la P·1 définira le même signe entre Cls.

Réciproquement on pourrait essayer de prendre comme idée primitive la valeur du signe  $\supset$  entre Cls, et d'en déduire la valeur entre les conditions  $x \varepsilon a \vdash x \varepsilon b$  par la même P·1. Mais cette P contient déjà le signe  $\supset$  avec la signification « on déduit » entre l'Hp et la Ths.

·2  $a \in \text{Cls} \vdash a \supset a$  { LEIBNIZ voir P5·3 {

·3  $a, b \in \text{Cls} \vdash a \supset b \vdash x \varepsilon a \vdash x \varepsilon b$  { F1889 P55 {  
 [ P·1  $\vdash a, b \in \text{Cls} \vdash a \supset b \vdash x \varepsilon a \vdash x \varepsilon b$  (1)  
 1. Import  $\vdash P$  ]

Appelons  $p$  et  $q$  les conditions  $x \varepsilon a \vdash x \varepsilon b$ . Par la P·1, la P·3 devient :  $p \supset q \vdash p \vdash q$  « si de  $p$  on déduit  $q$ , et si la  $p$  est vraie, la  $q$  sera vraie ».

Cette forme de raisonnement est une espèce de syllogisme.

$$^*4 \quad a, b, c \in \text{Cls} . a \supset b . b \supset c . \supset . a \supset c \quad \{ \text{Syll} \}$$

{ ARISTOTELES, *Analytica Priora*, lib. I, cap. IV:

« Εἰ τὸ Α κατὰ παντὸς τοῦ Β, καὶ τὸ Β κατὰ παντὸς τοῦ Γ, ἀνάγκη τὸ Α κατὰ παντὸς τοῦ Γ κατηγορεῖσθαι. » {

{ LEIBNIZ Mss. *Philosophie* viiB 4 fol.17 :

« Nota Γ aut vox est. eFd sive dTe. Si eTd et dTa tunc eTa. » {

Cette P exprime le « syllogisme » abrégé en Syll.

Soit *xay* une relation entre les objets *x* et *y*. Elle est dite « transitive » si  $xay . yaz \supset . xaz$ .

Le Syll dit que la relation  $\supset$  est transitive. La relation  $\varepsilon$  ne l'est pas. P. ex. de  $\tau \varepsilon \text{Np}$

et  $\text{Np} \varepsilon$  (ensemble infini illimité dénombrable)

on ne peut pas tirer de conséquence. On dit que  $\varepsilon$  a le sens composé (sensus compositi), et  $\supset$  le sens divisé (sensus divisi).  $x \varepsilon a$  dit que *a* est une propriété de *x* ;  $x \supset a$  dit que *a* est une propriété des individus de la classe *x*.

$$^*5 \quad a, b, c, d \in \text{Cls} . a \supset b . b \supset c . c \supset d . \supset . a \supset d \\ \{ \text{Hp. Syll} . \supset . a \supset c . c \supset d . \text{Syll} . \supset . \text{Ths} \}$$

$$^*6 \quad a, b, c \in \text{Cls} . \supset : a \supset b \supset c . = . a \supset b . b \supset c \quad \text{Df}$$

Cette abréviation se rencontre dans quelques démonstrations.

\* 5.

⊃ ∧

$$^*0 \quad a, b \in \text{Cls} . \supset : ab = a \wedge b : x \varepsilon ab . = . x \varepsilon (ab)$$

$$a, b, c \in \text{Cls} . \supset : abc = (ab)c :$$

$$ab = c . = . (ab) = c : a = bc . = . a = (bc) :$$

$$ab \supset c . = . (ab) \supset c : a \supset bc . = . a \supset (bc) \quad \text{Df}$$

Ces conventions ont pour but de sous-entendre le signe  $\wedge$  et des parenthèses.

$$^*1 \quad a, b \in \text{Cls} . \supset : x \varepsilon a \wedge b . = . x \varepsilon a \wedge x \varepsilon b \quad \text{Dfp} \quad \{ \text{Distrib}(\varepsilon, \wedge) \} \\ \{ \text{F1889 P47} \}$$

Cette égalité est une Dfp (définition possible), car le signe  $\wedge$  figure dans le premier membre entre Cls, et dans le second entre P. Si l'on suppose connue sa valeur entre P, on en déduira la valeur de la formule  $x \varepsilon ab$  ; mais pour avoir dans le premier membre *ab* seul, il est encore nécessaire de faire la transformation indiquée par la P8.2.

Réciproquement si l'on considère comme une idée primitive le produit *ab* de deux Cls, on déduira la valeur du produit logique entre les P  $x \varepsilon a$  et  $x \varepsilon b$ . Mais l'Hp  $a, b \in \text{Cls}$ , d'après la P4.0 est déjà le produit logique de deux P.

Soient  $xay$  et  $x\beta y$  deux fonctions de  $x, y$ . L'opération  $a$  est dite distributive par rapport à la  $\beta$ , si l'on a

$$(xay)\beta z = (xay\beta)zax \quad \{ \text{Distrib } a, \beta \}$$

ou

$$(y\beta z)ax = (yax\beta)zax$$

Le signe à droite indique le théorème qui exprime cette propriété.

P. ex. l'opération arithmétique  $\times$  est distributive par rapport à  $+$ .

L'opération  $\varepsilon$ , dont le résultat est une P, est donc distributive par rapport à  $\wedge$ .

Ex. De la P :  $Np \wedge (4N+1) \supset N^2+N^2$

Opér  $x\varepsilon$ . Distrib.  $\varepsilon, \wedge$   $\supset$ :  $x\varepsilon Np$ ,  $x\varepsilon 4N+1$   $\supset$ .  $x\varepsilon N^2+N^2$ .

$$\cdot 2 \quad a, b \varepsilon \text{Cls} \supset ab \varepsilon \text{Cls} \quad \{ \text{F1897 P22} \}$$

$$\cdot 3 \quad a, b \varepsilon \text{Cls} \supset ab \supset a \quad \cdot 31 \quad Hp \cdot 3 \supset ab \supset b$$

$\{ \text{LEIBNIZ, Specimen calculi universalis, Phils. t.7 p.218:}$

«  $a$  est  $a$  » «  $ab$  est  $a$  » «  $ab$  est  $b$ . » }

$$\cdot 4 \quad a, b, c \varepsilon \text{Cls} . a \supset b . a \supset c \supset . a \supset bc \quad \{ \text{Cmp} \}$$

$\{ \text{LEIBNIZ Id. p.222:}$

« Diversa praedicata in unum conjungi possunt, ut si constet  $a$  esse  $b$ , itemque aliunde constet  $a$  esse  $c$ , poterit dici  $a$  esse  $bc$ . » }

Elle exprime la forme de raisonnement dite « composition » Cmp.

$$\cdot 5 \quad a, b, c \varepsilon \text{Cls} . b \supset c \supset ab \supset ac \quad \{ \text{Oper } \wedge \}$$

$\{ \text{LEIBNIZ Id. p.222:}$

« Si  $b$  est  $c$ , tune  $ab$  erit  $ac$ . Quod ita demonstratur:  $ab$  est  $b$ ,  $b$  est  $c$ , ergo  $ab$  est  $c$ , per regulam consequentiarum primam.  $ab$  est  $c$ ,  $ab$  est  $a$ , ergo  $ab$  est  $ac$  per demonstrata supra. » }

$$[ a, b, c \varepsilon \text{Cls} . b \supset c . P:31 \supset ab \supset b . b \supset c . Syll \supset ab \supset c \quad \cdot 1 \}$$

$$a \supset b . P:3 . \cdot 1 \supset ab \supset a . ab \supset c . Cmp \supset ab \supset ac \quad ]$$

Cette P, analogue à § $\times$  P41, s'appelle « opérer par  $\wedge$  ».

La démonstration est la traduction exacte de celle donnée par Leibniz.

L'Analyse de cette dem. est contenue dans RdM. t.7 p.18.

$$\cdot 6 \quad a, b, c, d \varepsilon \text{Cls} . a \supset b . d \supset c \supset ad \supset bc$$

$\{ \text{LEIBNIZ Id. p.223:}$

« Si  $a$  est  $b$ , et  $d$  est  $c$ , tune  $ad$  erit  $bc$ . Hoc est praeclarum theorema, quod demonstratur hoc modo:

$a$  est  $b$ , ergo  $ad$  est  $bd$  per priora,

$d$  est  $c$ , ergo  $bd$  est  $bc$  rursus per priora,

$ad$  est  $bd$ , et  $bd$  est  $bc$ , ergo  $ad$  est  $bc$ . Quod erat demonstrandum. » }

$\{ \text{McCOLL a.1878 P9} \}$

$$[ Hp . P:5 \supset ad \supset bd . bd \supset bc \supset . Ths \quad ]$$

•61  $a, b, c, d \in \text{Cls} . a \supset b . a \supset c . bc \supset d . \supset . a \supset d$  {F1897 P35}  
 [ Hp . Cmp .  $\supset . a \supset bc . bc \supset d$  . Syll .  $\supset$  . Ths ]

•62 ———— .  $ab \supset c . ac \supset d . \supset . ab \supset d$  {F1897 P37}  
 [ Hp .  $\supset . ab \supset ac . ac \supset d$  .  $\supset$  . Ths ]

•63 ———— .  $a \supset b . bc \supset d . \supset . ac \supset d$  {F1895 P115}  
 [ Hp .  $\supset . ac \supset bc . bc \supset d$  .  $\supset$  . Ths ]

•7  $a, b, c \in \text{Cls} . \supset . a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$  { Distrib  $(\wedge, \vee)$  }

L'opération  $\wedge$  est *auto-distributive*. Voir §- 2-62.

\* 6.0  $a, b \in \text{Cls} . \supset : a = b . \equiv . a \supset b . b \supset a$  Dfp

{ LEIBNIZ *PhilS.* t.7 p.225 :

« Si  $a$  est  $b$ , et  $b$  est  $a$ , tunc  $a$  et  $b$  dicuntur esse idem. » }

{ MCCOLL P7 :  $(a=b) \equiv (a:b)(b:a)$  }

Cette P exprime l'égalité de deux classes par le signe  $\supset$ . Le signe  $=$  se rencontre nécessairement dans toute définition, et ne peut pas être défini. Si l'on veut considérer cette P comme une Df il faut regarder le deuxième signe  $=$  comme lié avec le signe Df. Leur ensemble signifie « est égal par définition » ou « nous posons ». Il n'est plus le même signe qui figure dans  $a=b$ . Ex :  $(2N) \wedge (3N) = 6N$

« les nombres multiples de 2 et multiples de 3 sont multiples de  $6N$  ».

$$N \wedge x \exists (3x-2 \in 5N) = 5N-1$$

« Les nombres  $x$  qui rendent  $3x-2$  multiple de 5 s'obtiennent de la formule  $5y-1$ , en  $y$  remplaçant  $y$  par tous les  $N$  ».

•1  $a \in \text{Cls} . \supset . a = aa$  { LEIBNIZ Mss. VII p.3 : «  $AA \in A$  » }

[  $(a, a, a) | (a, b, c) P5.4$  . Simpl .  $\supset : a \in \text{Cls} . \supset . a \supset aa$  (1)

$(a|b) P5.3$  . Simpl .  $\supset : a \in \text{Cls} . \supset . aa \supset a$  (2)

(1) . (2) . Cmp . P.0 .  $\supset$  . P ]

•2  $a, b \in \text{Cls} . \supset . ab = ba$  { Comm  $\wedge$  }

{ LEIBNIZ Mss. VII B2 p.3 : «  $AB \in BA$  » }

Soit  $xay$  une fonction de  $x$  et  $y$ . L'opération  $a$  est dite commutative si l'on a

$$xay = yax \quad \{ \text{Comm } a \}$$

La P.2 exprime la commutativité de l'opération  $\wedge$ .

[ Hp . P5.3 . P5.31 .  $\supset . ab \supset b . ab \supset a$  . Cmp .  $\supset . ab \supset ba$  (1)

Hp .  $(b, a) | (a, b) P(1)$  .  $\supset . ba \supset ab$  (2)

(1) . (2) .  $\supset$  . P ]

•3  $a, b, c \in \text{Cls} . \supset : a(bc) = (ab)c \equiv abc$  { Assoc  $\wedge$  }

{ BOOLE a.1854 p.29 }



On dit que l'opération  $\alpha$  est associative, si

$$(x\alpha y)\alpha z = x\alpha(y\alpha z)$$

{ Assoc  $\alpha$  }

L'opération  $\alpha$  est associative.

$$[ \text{Hp, P5:3 } \vdash (ab)c \supset ab, ab \supset a \vdash (ab)c \supset a \quad (1)$$

$$» \quad » \quad » \quad , ab \supset b \vdash (ab)c \supset b \quad (2)$$

$$» \quad » \quad ab c \supset c, 2, \text{Cmp} \vdash (ab c) \supset bc \quad (3)$$

$$(1), (3), \text{Cmp} \vdash (ab c) \supset a bc ]$$

# \* 7.

Soient  $p, q, r$  des P contenant une variable, ou un système de variables  $x$ .

$$\cdot 0 \quad p =_x q \quad \text{signifie} \quad p \supset_x q : q \supset_x p.$$

$$\cdot 01 \quad p \supset_x q \supset r \quad \text{signifie} \quad pq \supset_x r.$$

$$\cdot 02 \quad p \supset_x q =_x r \quad \text{signifie} \quad p \supset_x q \supset r : r \supset_x q.$$

Ces P s'énoncent symboliquement :

$$\cdot 1 \quad a, b \in \text{Cls} \vdash : x \mathcal{E} a =_x x \mathcal{E} b \vdash : a = b \quad \text{Df}$$

$$\cdot 11 \quad a, b, c \in \text{Cls} \vdash : x \mathcal{E} a \supset : x \mathcal{E} b \supset : x \mathcal{E} c \vdash : a b \supset c \quad \text{Df}$$

$$\cdot 12 \quad a, b, c \in \text{Cls} \vdash : x \mathcal{E} a \supset : x \mathcal{E} b =_x x \mathcal{E} c \vdash : a b \supset c, ac \supset b \quad \text{Df}$$

Dans la formule  $p =_x q$ , la lettre  $x$  est apparente. On sous-entend l'indice au signe  $=$  lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté à craindre. Voir P1:7.

$$\text{Ex.} \quad a \mathcal{E} Np =_x a \mathcal{E} N+1 : a-1 !+1 \mathcal{E} N \times a$$

$$\S-5:5 \quad \S/8:6 \quad 14:140:1:3:5:8 \dots$$

Dans ces exemples l'indice au signe  $=$  est toujours sous-entendu.

Dans la formule  $p \supset_x q \supset r$ , le premier  $\supset$  porte l'indice  $x$  qui peut être sous-entendu; le deuxième ne porte pas d'indice.

Des deux formes  $p \supset_x q \supset r$  et  $p q \supset r$ , la deuxième est plus simple, lorsqu'il s'agit d'une proposition seule; mais la première est plus commode lorsqu'on a une longue suite de propositions qui ont une Hp commune; alors on peut mettre en évidence cette Hp, et l'écrire une seule fois.

$$\text{Ex.: } \S/4:6:7 \quad 11:2:4.$$

La P:11 exprime, dans un cas particulier, la règle de l'exportation.

$$\text{Ex. de la } \cdot 02: \quad a, b, c \in N \vdash : a = b =_x a + c = b + c$$

$$a, b \in N \vdash : a^2 + b^2 \in 3N =_x a \in 3N, b \in 3N$$

$$\cdot 2 \quad a, b \in \text{Cls} \vdash : a \supset b =_x a = ab \quad \text{Dfp}$$

{ LEIBNIZ *PhilS.* t.7 p.214: «Omne A est B id est AB  $\propto$  A.» }

Cette P transforme  $a \supset b$  en une égalité. Le signe  $\supset$  y figure aussi pour séparer l'Hp de la Ths. Voir F1897 P52 note.

$$[ a, b \in \text{Cls} \vdash a \supset b, \text{P4:2 } \vdash a \supset a, a \supset b, \text{Cmp} \vdash a \supset ab \quad (1)$$

$$a, b \in \text{Cls} \vdash a \supset b, (1), \text{P5:3 } \vdash a \supset ab, ab \supset a, \text{P4:0 } \vdash a = ab \quad (2)$$

$$a = ab, \text{P5:31 } \vdash a \supset b \quad (3)$$

$$(2), (3) \vdash P ]$$

- 3  $a, b, c \in \text{Cls} \ . \supset : a \supset bc \ . = . a \supset b . a \supset c \quad \{ \text{Distrib}(\supset, \wedge) \}$   
 $\{ \text{McCOLL a.1878 P12 : } \langle (x : A) (x : B) (x : C) = (x : ABC) . \rangle \}$   
 $[ a, b, c \in \text{Cls} . a \supset bc . \text{P5-3-31} \ . \supset . a \supset b . a \supset c \quad (1)$   
 $(1) . \text{Cmp} \ . \supset . \text{P} ]$

- 4  $a, b, c \in \text{Cls} \ . ab \supset c \ . ac \supset b \ . \supset . ab = ac \quad \{ \text{F1897 P55} \}$   
 $[ \text{Hp} \ . \supset . ab \supset ac . ac \supset ab \ . \supset . \text{Ths} ]$

Ex. Appelons  $a, b, c$  les trois équations

$$x+y = n \qquad xy = n \qquad (x-y)^2 = n^2 - 4n$$

Par des règles algébriques on a  $ab \supset c \ . ac \supset b$  ; on déduit l'équivalence des systèmes  $ab$  et  $ac$  (mais non de  $ab$  et  $bc$ ).

## \* 8.

- 1  $a \in \text{Cls} \ . \supset . x \mathfrak{z}(x \mathfrak{z} a) = a \quad \text{Dfp} \quad \{ \text{F1889 P58} \}$

Cette égalité a le caractère d'une Dfp, car le signe  $\mathfrak{z}$  figure dans le premier membre et non dans le second. Mais, contrairement aux autres Df, le premier membre est plus compliqué que le second. Dans la pratique on écrit le signe  $x \mathfrak{z}$  en avant d'une P réductible, mais non réduite, à la forme  $x \mathfrak{z} a$ .

- 2  $a, b \in \text{Cls} \ . \supset . a \mathfrak{z} b = x \mathfrak{z}(x \mathfrak{z} a . \mathfrak{z} . x \mathfrak{z} b) \quad \text{Dfp} \quad \{ \text{Distrib}(\mathfrak{z}, \wedge) \}$   
 $\{ \text{F1889 P60} \}$

[ P5-1 . Oper  $x \mathfrak{z} \ . \supset . \text{P} ]$

Cette P dit que l'opération  $\mathfrak{z}$  est distributive par rapport à  $\mathfrak{z}$ .

- 3  $a \in \text{Cls} \ . \supset . a = x \mathfrak{z}(u \in \text{Cls} . a \supset u \ . \supset u . x \mathfrak{z} u) \quad \{ \text{F1897 P61} \}$

[ P4-3  $\supset$   $a, u \in \text{Cls} . a \supset u . x \mathfrak{z} a \ . \supset . x \mathfrak{z} u \quad (1)$

(1) . Export  $\supset$   $a \in \text{Cls} \ . \supset . x \mathfrak{z} a \ . \supset x : u \in \text{Cls} . a \supset u \ . \supset u . x \mathfrak{z} u \quad (2)$

(2) . Oper  $x \mathfrak{z} \supset$   $a \in \text{Cls} \ . \supset . a \supset x \mathfrak{z} \quad \gg \quad \gg \quad (3)$

$a \in \text{Cls} : u \in \text{Cls} . a \supset u \ . \supset u . x \mathfrak{z} u : \supset : a \in \text{Cls} . a \supset a : \supset : x \mathfrak{z} a \quad (4)$

(4) . Export . Oper  $x \mathfrak{z} \supset$   $a \in \text{Cls} \ . \supset . x \mathfrak{z} u \in \text{Cls} . a \supset u \ . \supset u . x \mathfrak{z} u) \supset a \quad (5)$

(3) . (5)  $\supset . \text{P} ]$

Ex. §2-1 Dm . 2-6 Dm . §-3-8 Dm.

## \* 9.

- 1  $(x; y; \mathfrak{z}) = [(x; y); \mathfrak{z}] \quad \text{Df} \quad \{ \text{F1898 P70} \}$

- 2  $(x; y) = (a; b) \ . = . x = a \ . y = b \quad \text{Dfp} \quad \{ \text{F1897 P71} \}$

Sur cette P voir RdM t.6 p.65, p.119.

- 3  $a, b, c \in \text{Cls} \ . \supset :$   
 $x \mathfrak{z} a \ . \supset x : (x; y) \mathfrak{z} b \ . \supset y . (x; y) \mathfrak{z} c \ . = : x \mathfrak{z} a . (x; y) \mathfrak{z} b \ . \supset x, y . (x; y) \mathfrak{z} c$   
 $\{ \text{F1894 §18 P2; 1897 P74} \}$



Voir F1894 §39. I. Zignago nous communique que si la relation  $xay$  satisfait aux conditions 1·2·3, elle est réductible à l'égalité entre Cls :

$$xay \text{ .} \text{=} z\mathfrak{z}(zax) = z\mathfrak{z}(zay)$$

Si la relation est algébrique, voir IdM. a.1900 p.37, 315.

$$\cdot 4 \quad x=y=z \text{ .} \text{=} x=y \cdot y=z$$

Df

exprime une abréviation très connue.

$$\cdot 5 \quad a \in \text{Cls} \cdot x\mathfrak{z}a \cdot y=x \text{ .} \supset \cdot y\mathfrak{z}a \quad \{ \text{F1895 §4 P10} \}$$

$$\cdot 6 \quad x=y \text{ .} \text{=} a \in \text{Cls} \cdot x\mathfrak{z}a \cdot \supset_a \cdot y\mathfrak{z}a \quad \text{Dfp} \quad \{ \text{F1897 P80} \}$$

{ LEIBNIZ Id. p.219: «Eadem sunt quorum unum in alterius locum substitui potest, salva veritate.» }

L'égalité  $x=y$  signifie « toute classe qui contient  $x$  contiendra aussi  $y$  », ou « toute propriété de  $x$  est une propriété de  $y$  » ; ou « la vérité de la proposition  $x\mathfrak{z}a$ , qui contient  $x$ , n'est pas altérée si l'on remplace  $x$  par  $y$ . »

Cette P est une Dfp, car le second membre ne contient pas le signe  $=$  qui figure dans le premier. La difficulté qu'on rencontre à la considérer comme une Df réelle, que le signe  $=$  sert déjà dans la définition, peut être écartée par la remarque à la P6·0.

La P·6 ne donne pas toute la signification de  $x=y$ , car on doit encore définir cette égalité pour les nombres négatifs, rationnels §-3·2 §/3·2 dans les Df par abstraction ; de P·1 on ne peut pas tirer la P6·0. V. F1897 p.39.

Dans les traités d'Arithmétique on a les P

$2/3 = 4/6$   $2/3$  est une fraction irréductible  $4/6$  ne l'est pas  
ce qui paraît en contradiction avec la P·5. Ici le signe  $2/3$  représente d'abord un nombre rationnel, ensuite l'ensemble des trois signes  $2 / 3$ .

$$\cdot 61 \quad \text{Dm P·1} \quad a \in \text{Cls} \cdot x\mathfrak{z}a \cdot \text{Simplif} \cdot \supset \cdot x\mathfrak{z}a : \text{P·6} \cdot \supset \cdot \text{P}$$

$$\cdot 62 \quad \text{Dm P·2} \quad \text{P·1} \cdot \supset \cdot x\mathfrak{z} z\mathfrak{z}(z=x) \cdot \text{P·6} \cdot \supset \cdot y\mathfrak{z} y\mathfrak{z}(z=x) \cdot \supset \cdot \text{P}$$

$$\cdot 63 \quad \text{Dm P·3} \quad \text{Hp} \cdot \supset \cdot a \in \text{Cls} \cdot x\mathfrak{z}a \cdot \text{P·6} \cdot \supset \cdot y\mathfrak{z}a \cdot \text{P·6} \cdot \supset \cdot z\mathfrak{z}a \cdot \supset \cdot \text{Ths}$$

$$\cdot 64 \quad \text{Dm P·5} \quad \text{P·6} \cdot \text{Import} \cdot \supset \cdot \text{P} \quad \{ \text{F1897 P80-84} \}$$

§2  $\cup = (\text{ou})$

\* 1°  $a, b \in \text{Cls} \Rightarrow a \cup b = x \{ x \in \text{Cls} : a \supset x, b \supset x \Rightarrow x \in x \}$   
 {F1897 P241} Df  $\cup$

$a \cup b$ , qu'on peut lire «  $a$  ou  $b$  » indique donc la classe des objets qui appartiennent à l'une, au moins, des classes  $a$  et  $b$ .

L'opération indiquée par le signe  $\cup$  s'appelle « addition logique ».

Ex. §Np P2:1 :  $Np \cup (3 \div N) \supset (6N+1) \cup (6N+1)$

§P 5:1 §Num 41:5 §max 1:3 §Dyr 1:33 §mult 1:02:33 §Q 82:8 §z 1:3...

Leibniz a indiqué l'opération  $\cup$  par le signe  $+$ , ou par le même signe dans un cercle. Nous ne pouvons pas représenter par un même signe les additions logique et arithmétique, sans produire des ambiguïtés. P. ex. :

$$Np + Np = 2N+1, \quad Np \cup Np = Np.$$

Le signe  $+$  dans Boole a une signification un peu différente.

\* 1°  $a, b, c \in \text{Cls} \Rightarrow$   
 $abc = (ab)c : abc = a(bc) : ab \supset c \Rightarrow (ab) \supset c : a \supset bc \Rightarrow a \supset (bc) :$   
 $a \cup bc = (a \cup b)c : x \in a \cup b \Rightarrow x \in (a \cup b)$  Df

\* 2°  $a, b \in \text{Cls} \Rightarrow a \cup b \in \text{Cls}$

\* 3°  $\ast \quad a \supset a \cup b, b \supset a \cup b$   
 { LEIBNIZ *Philos.* t.7 p.240 :  $N$  est in  $A \oplus N \ast$  }

[ §1P4:3  $\Rightarrow a, b, c \in \text{Cls} : a \supset c, b \supset c, x \in a \Rightarrow x \in c$  (1)

(1) . Export  $\Rightarrow a, b \in \text{Cls} : x \in a \Rightarrow c \in \text{Cls} : a \supset c, b \supset c \Rightarrow x \in c$  (2)

(2) . Df  $\Rightarrow \ast \Rightarrow \Rightarrow \Rightarrow x \in a \cup b$  (3)

(3) . Export  $\Rightarrow a, b \in \text{Cls} \Rightarrow x \in a \Rightarrow x \in a \cup b, x \in b \Rightarrow x \in a \cup b$  (4)

(4) . Oper  $x \in \Rightarrow P$  ]

\* 4°  $a, b, c \in \text{Cls} : a \supset c, b \supset c \Rightarrow a \cup b \supset c$  { LEIBNIZ Id. p.232 :

« Si  $A$  est in  $C$  et  $B$  est in  $C$  etiam  $A+B$  erit in  $C$ . » }

[ Df  $\cup$ , Oper  $x \in \Rightarrow a, b \in \text{Cls} \Rightarrow x \in a \cup b \Rightarrow c \in \text{Cls} : a \supset c, b \supset c \Rightarrow x \in c$  (1)

(1) . Simpl  $\Rightarrow a, b \in \text{Cls} : x \in a \cup b \Rightarrow c \in \text{Cls} : a \supset c, b \supset c \Rightarrow x \in c$  (2)

(2) . Import  $\Rightarrow a, b, c \in \text{Cls} : x \in a \cup b, a \supset c, b \supset c \Rightarrow x \in c$  (3)

(3) . Export  $\Rightarrow a, b, c \in \text{Cls} : a \supset c, b \supset c \Rightarrow x \in a \cup b \Rightarrow x \in c$  (4)

(4) . Oper  $x \in \Rightarrow P$  ]

\* 5°  $a, b, c \in \text{Cls} : a \supset b \Rightarrow a \cup c \supset b \cup c$  { Oper  $\cup$  }  
 { LEIBNIZ Id. p.239 } { MCCOLL a.1878 P10 }

\* 6°  $a, b, c, d \in \text{Cls} : a \supset b, c \supset d \Rightarrow a \cup c \supset b \cup d$  { LEIBNIZ p.232 :

« Si  $A$  est in  $M$ , et  $B$  est in  $N$ , erit  $A+B$  in  $M+N$ . » }

\* 6A  $a \supset b \cup c, b \supset d, c \supset d \Rightarrow a \supset d$   
 { DE MORGAN *Formal logic* a.1847 p.123 }

\* 2.  $a, b, c \in \text{Cls} \supset$

- \*1  $a \cup a = a$  { LEIBNIZ Id. p.230:  
« Si idem secum ipso sumatur, nihil constituitur novum, seu  $A \vdash A \infty A$ . »  
[ Df  $\cup \supset$ .  $a \cup a = x\exists(c \in \text{Cls} . a \supset c . \supset c . x \in c)$  . §1 P8'3  $\supset$ . P ]
- \*2  $a \cup b = b \cup a$  { LEIBNIZ Id. p.237 { Comm  $\cup$  {  
[ Df  $\cup \supset$ .  $a \cup b = x\exists(c \in \text{Cls} . a \supset c . b \supset c . \supset c . x \in c)$   
Comm  $\cap \supset$ . « » .  $b \supset c . a \supset c . \supset c .$  »  
Df  $\cup \supset$ . « »  $b \cup a$  ]
- \*3  $a \cup b \cup c = a \cup (b \cup c) = (a \cup b) \cup c$  { SCHRÖDER a.1877 P3' { Assoc  $\cup$  {  
[  $a \cup b \cup c = x\exists[d \in \text{Cls} . a \cup b \supset d . c \supset d . \supset d . x \in d]$   
 $= x\exists[d \in \text{Cls} . a \supset d . b \supset d . c \supset d . \supset d . x \in d]$   
 $= x\exists[d \in \text{Cls} . a \supset d . b \cup c \supset d . \supset d . x \in d]$   
 $= a \cup (b \cup c)$  ]
- \*4  $b \supset a \implies a \cup b = a$  { LEIBNIZ Id. p.232:  
« Si  $B$  est in  $A$ , erit  $A \vdash B \infty A$  ... Si  $A \vdash B \infty A$ , tunc  $B$  erit in  $A$ . »]
- \*5  $a \supset c . b \supset c \implies a \cup b \supset c$  [ P1'2'3'4  $\supset$ . P ]  
{ MCCOLL a.1878 p.11 {
- \*6 P'5  $\supset$ . P1'0  
[ §1 P8'3  $\supset$ .  $a \cup b = x\exists[c \in \text{Cls} . a \cup b \supset c . \supset c . x \in c)$   
P'5  $\supset$ . « » « » « » .  $a \supset c . b \supset c .$  « » ) ]

De la P1'0, considérée comme Df du signe  $\cup$ , nous avons tiré les P successives. Réciproquement de la dernière 2'5 on peut déduire la 1'0; et puisque la \*5 est conséquence des P1'2'3'4, on aura une autre façon de traiter cet ensemble de P. On peut introduire l'idée  $\cup$  comme primitive, en la déterminant par les P1'2'3'4, qui joueront le rôle de Pp (propositions primitives).

Si l'on remplace  $a \supset b$  par  $b \supset a$ , et  $a \cap b$  par  $a \cup b$  dans les P :

§1 P5'2'3'4'5'6'61 6'1'2'3 7'2'3

on trouve

§2 P1'2'3'4'5'6'61 2'1'2'3 4'5

La même substitution dans les démonstrations des premières P, permet de tirer directement les dernières des P1'2'3'4.

Cette correspondance, dite « loi de dualité », a été énoncée par Peirce a.1867.

Une troisième théorie du signe  $\cup$  sera indiquée dans §- P3'1.

\* 3.  $a, b, c, d \in \text{Cls} \supset$

- \*0  $ab \cup ac \supset a(b \cup c)$   
[ P1'3  $\supset$ .  $b \supset b \cup c . c \supset b \cup c$  . Oper  $\cap \supset$ .  $ab \supset a(b \cup c)$  .  $ac \supset a(b \cup c)$  . P1'4  $\supset$ . P ]
- \*01  $a(b \cup c) \supset ab \cup ac$  Pp

Cette P n'est pas conséquence des P précédentes. Pour reconnaître son indépendance, il suffit de donner aux signes Cls,  $\cap$ ,  $\cup$  une interprétation qui satisfasse aux P précédentes, mais non à celle-ci. Considérons des points;

par Cls indiquons les classes convexes de points, c'est-à-dire les  $a$  telles que  $\text{Med}a = a$ ; au signe  $\cap$  conservons sa valeur; alors, par la Df10,  $a \cup b$  indique la plus petite classe convexe contenant  $a$  et  $b$ . Il est aisé de voir que subsistent les propositions précédentes du §9, et aussi les dualités, mais non la nouvelle 01. Il faut donc, en suivant l'ordre que nous avons ici choisi, la considérer comme une proposition primitive. Voir §-P35.

$$\cdot 1 \quad a(b \cup c) = ab \cup ac \quad [ =, P0, P01 ] \quad \} \text{Distrib}(\cap, \cup) \{$$

$\} \text{LAMBERT a.1781 p.33:}$

Will man aber setzen  $(m+n)A$ , so ist dieses  $= mA + nA$ . }

$$\cdot 11 \quad (a \cup b)c = ac \cup bc \quad [ \text{Comm } \cap, \text{Distrib } \cup, \cap, \supset, P ]$$

$$\cdot 12 \quad (a \cup b)(c \cup d) = ac \cup ad \cup bc \cup bd \quad \} \text{LAMBERT id} \{$$

$$\cdot 2 \quad a \cup ab = a \quad \cdot 21 \quad a(a \cup b) = a \quad \} \text{SCHRÖDER a.1877 P10'10'}$$

$$\cdot 22 \quad (a \cup c)(b \cup c) = ab \cup c \quad \} \text{Distrib}(\cup, \cap) \{ \} \text{PEIRCE a.1867 p.250}$$

$$\cdot 23 \quad (a \cup b)(b \cup c)(c \cup a) = ab \cup bc \cup ca \quad \} \text{SCHRÖDER a.1890 p.383}$$

$$\cdot 3 \quad a = b \quad . =, \quad a \cup b \supset ab \quad \} \text{SCHRÖDER a.1890 p.382}$$

$$\cdot 4 \quad ac \supset b, a \supset bc \quad . =, \quad a \supset b \quad \} \text{PEIRCE a.1880 p.34}$$

$$\cdot 41 \quad ac \supset bc, ac \supset bc \quad . =, \quad a \supset b \quad \} \text{SCHRÖDER a.1890 p.362}$$

$$\cdot 42 \quad ac = bc, ac = bc \quad . =, \quad a = b \quad \} \quad \gg \quad \text{a.1877 p.12}$$

$$\cdot 43 \quad a \supset b, b \supset c \quad . =, \quad a \cup b \supset bc \quad \} \text{PADOA F1897}$$

$$\cdot 5 \quad a \supset bc, ab \supset d, ac \supset d \quad . \supset, \quad a \supset d \quad \} \text{PIERI F1897}$$

\* 4.  $a, b, c \in \text{Cls } \supset$ .

$$\cdot 0 \quad x \varepsilon a \cup x \varepsilon b \quad . =, \quad x \varepsilon a \cup b \quad \text{Df} \quad \} \text{F1889 P48} \} \text{Distrib}(\varepsilon, \cup)$$

Cette P exprime la somme logique de deux propositions  $x \varepsilon a$  et  $x \varepsilon b$  par la P  $x \varepsilon a \cup b$ , où ne figure que la somme de deux classes. Puisque toute P est réductible à la forme  $x \varepsilon a$ , où  $x$  est une variable, ou un système de variables, on aura défini la somme de deux P quelconques.

Ex. §Np P12:  $a \varepsilon \text{Np}, b, c \varepsilon \text{N}, b \cup c \varepsilon \text{N} \times a \supset, b \varepsilon \text{N} \times a \cup, c \varepsilon \text{N} \times a$

Ex. §> 2.4.5 §< 1.6.3.4 §N5.5 ...

La P0 dit que l'opération  $\varepsilon$  est distributive par rapport à  $\cup$ . L'opération  $\supset$  ne l'est pas. En effet de  $(\text{N}+1)^2 \supset 4\text{N} \cup (4\text{N}+1)$ , on ne peut pas tirer  $(\text{N}+1)^2 \supset 4\text{N}$ , ou  $(\text{N}+1)^2 \supset 4\text{N}+1$ .

$$\cdot 1 \quad x \varepsilon x \varepsilon a \cup x \varepsilon b \quad . =, \quad a \cup b \quad \text{Dfp} \quad \} \text{F1889 P62} \} \text{Distrib}(\varepsilon, \cup)$$

[ P0, Oper  $x \varepsilon \supset, P$  ]

Cette P exprime la somme logique de deux classes par une somme de P.

$$\cdot 2 \quad a \supset c \cup, b \supset c \supset, ab \supset c \quad \} \text{McCOLL a.1878 P13}$$

$$\cdot 21 \quad a \supset b \cup, a \supset c \supset, a \supset bc \quad \gg \gg \text{P14}$$

$$\cdot 22 \quad a \supset c \cup, b \supset c \supset, a \cup b \supset c \quad . =, \quad a = b$$

$\} \text{McCOLL Congrès de Philosophie, Paris a.1900}$

§3  $\Lambda =$  (classe nulle)

\* 1°  $\Lambda = x\mathfrak{z}(a\mathfrak{E}\text{Cls} \supset a, x\mathfrak{E}a)$  Df $\Lambda$

$\Lambda$  indique la classe nulle. Leibniz l'a indiquée par N, initiale de Nihil; Boole et ses continuateurs par 0. Ce signe se rencontre rarement dans le F, où il est exprimé par les signes - et  $\mathfrak{U}$ . Nous le conservons ici, car il permet de traiter quelques théories logiques. Ex:

$N^3\wedge(N^3\vdash N^3)=\Lambda$  « il n'y a pas de cubes, sommes de deux cubes ».

·1  $\Lambda \mathfrak{E}\text{Cls}$  { F1897 P436 }

·2  $a\mathfrak{E}\text{Cls} \supset \Lambda \supset a$  { F1888 §2 P13 }

[ Df $\Lambda \supset \therefore x\mathfrak{E}\Lambda \supset a\mathfrak{E}\text{Cls} \supset x, x\mathfrak{E}a$  (1)

(1). Import  $\supset \therefore x\mathfrak{E}\Lambda \supset a\mathfrak{E}\text{Cls} \supset x\mathfrak{E}a$  (2)

(2). Export  $\supset \therefore a\mathfrak{E}\text{Cls} \supset x\mathfrak{E}\Lambda \supset x\mathfrak{E}a$  (3)

(3). Oper  $x\mathfrak{z} \supset P$  ]

·3  $a\mathfrak{E}\text{Cls} \supset a\wedge = \Lambda$  { BOOLE a.1854 p.48 }

[ P·2 . §1 P7·2  $\supset P$  ]

·4  $a\mathfrak{E}\text{Cls} \supset a\supset\Lambda \equiv a=\Lambda$  { F1889 P38 }  
[ P·2  $\supset P$  ]

·5  $a\mathfrak{E}\text{Cls} \supset \therefore a=\Lambda \equiv b\mathfrak{E}\text{Cls} \supset b, a\supset b$  Dfp  
{ F1897 P300 }

$a, b, c, d\mathfrak{E}\text{Cls} \supset$

·6  $a\supset b, b=\Lambda \supset a=\Lambda$  [ P·4 . Syll  $\supset P$  ]

·7  $a\supset b, bc=\Lambda \supset ac=\Lambda$  { ARISTOTELES id. id. }

·8  $a\supset c, b\supset d, cd=\Lambda \supset ab=\Lambda$  { DE MORGAN a.1847 p.123 }

·  $\Lambda$  \* 2.  $a, b, c, d\mathfrak{E}\text{Cls} \supset$

·1  $a\wedge = a$  { BOOLE a.1854 p.47 }  
[ Hp . P1·2  $\supset \Lambda \supset a, \S P2·4 \supset \text{Ths}$  ]

·2  $a\wedge b = \Lambda \equiv a=\Lambda, b=\Lambda$  { BOOLE a.1854; F1888 §6 P9 }  
[ P1·4  $\supset a\wedge b = \Lambda \equiv a\wedge \supset \Lambda$   
§ P2·5  $\supset \therefore a\supset \Lambda, b\supset \Lambda$   
P1·4  $\supset \therefore a=\Lambda, b=\Lambda$  ]

·3  $a=\Lambda \vee b=\Lambda \supset ab=\Lambda$  { F1895 §3 P11 }

·4  $a\wedge b = a\wedge c, a\wedge b = \Lambda, a\wedge c = \Lambda \supset b=c$



$$\cdot 3 \quad a \Join b = c \Join d, a = c, ab = \Lambda, cd = \Lambda, \supset, b = d$$

{ LEIBNIZ Id. p.234: « Si  $A \vdash B \infty C \vdash D$  et  $A \infty C$ , erit  $B \infty D$ , modo  $A$  et  $B$  itemque  $C$  et  $D$  sint incommunicantia. » }

$$\cdot 6 \quad a \Join b \supset c \Join d, c \supset a, d \supset b, ab = \Lambda, \supset, a \supset c, b \supset d, cd = \Lambda$$

{ HAUBER a.1829 §291 }

$$\cdot 61 \quad \text{Hp } \cdot 6, \supset, a = c, b = d$$

$$\cdot 7 \quad a \supset b \Join c, ab = \Lambda, \supset, a \supset c \quad \{ \text{DE MORGAN a.1847 p.122 } \}$$

Une remarque curieuse est la suivante. Remplaçons :

$ax \in \text{Cls}$  par  $ax \in X$

$a \supset b$  »  $a \leq b$ , ou par «  $a$  est un diviseur de  $b$  »

$a \Join b$  » « le plus petit des nombres  $a$  et  $b$  » ou par « le plus grand commun diviseur entre  $a$  et  $b$  »

$a \Join b$  » « le plus grand des nombres  $a$  et  $b$  » ou par « le plus petit multiple commun entre  $a$  et  $b$  »

$\Lambda$  » 1

Subsisteront toutes les P précédentes qui ne contiennent que les signes indiqués, comme les §1 P4·4·5 P5·2·7 P6·0·3 P7·2·3·4 ... P. ex. la § $\Lambda$  P2·7, par la deuxième substitution devient :

« Si le nombre  $a$  divise le plus petit multiple commun entre  $b$  et  $c$ , et s'il est premier avec  $b$ , il divise  $c$  ». Voir §ult 1·8.

## §4 - = (non)

\* 1.0 Soit  $a$  une Cls:  $\neg a$  indique la Cls des "non  $a$ ".

\*01 Soit  $p$  une proposition;  $\neg p$  désigne sa négation.

Ex. de la négation d'une Cls. §Np P1.0 :

$$Np = (N+1) - [(N+1) \cdot (N+1)] \quad \text{Df.}$$

« Nombre premier signifie nombre (supérieur à l'unité, non décomposable dans le produit de deux nombres ».

Dans ce cas, et dans §+ 8.6.7 §/ 37 §N 35 §max 1.0 §Dvr 2.45 §Np 3.9 9.1 §l' 5.0 6.7 §D 3.1 §log 1.1 3 §q<sub>5</sub> 2.0 §Subst 3.0 5.1 §q' 10.3 §sin 8.7 §vet 8.83 39.1 2.3 4 on a toujours l'expression  $b-a$ , où la classe  $a$  est contenue dans  $b$ .

Dans §S 1.0 §Lm 1.0 la classe  $a$  n'est pas nécessairement contenue dans  $b$ .

On ne rencontre pas l'expression isolée  $\neg a$ .

Ex. de la négation d'une P :

$$\S\text{p } 9.01 : a, b \in N, \neg(a=b) \supset a^2 + b^2 > 2ab.$$

Autres ex : §+ 8.4.5 §> 2.6.7 §/ 40.1 3.4 41 §N 9.51.52 §Num 11.3 §Σ 21.2 §quot 3.4 §Dvr 2.6 §Np 12.3 §lim 16.12 §q' 2.5 4.2 10.5 §τ 5.2 §sin 2.0 2 ... Il accompagne aussi le signe §.

Nous avons cité presque toutes les P du F contenant le signe -. On voit que leur nombre est très petit.

Le signe de négation se rencontre sous la forme du signe — de l'Arithmétique, avec lequel il présente quelques analogies formelles, dans Leibniz, Segner, Boole, ..., avec la même valeur, ou avec des valeurs semblables. Dans quelques travaux il a la forme ∞.

Nous ne donnons pas ici une définition symbolique de la négation ; nous la considérons comme une idée primitive, dont la valeur est déterminée par les propositions primitives 2.1.2.3.

Les P38, §t P6 indiquent la possibilité d'autres théories, où la négation est définie ; dans F1897 P363 et 433 sont indiquées deux autres théories ; mais elles ne sont pas développées.

$$*1 \quad a \in \text{Cls} \supset \neg a = x \mathcal{E} a) = x \mathcal{E} \neg a \quad \text{Dfp}$$

$$*11 \quad \neg a = \neg a' \supset a = a' \quad \text{Dfp}$$

Les P lient le double rôle de la négation entre P et entre Cls ; la \*1 exprime la négation d'une P par la négation d'une classe ; la \*11 exprime la négation d'une classe par la négation d'une P. Il suffit donc de considérer l'une des P\*01 comme exprimant une idée primitive, et prendre une des P\*11 comme Df.

Pour supprimer des parenthèses on fait les conventions suivantes :

$$*2 \quad x = y \supset \neg x = \neg y \quad \text{Df}$$



• \* 3.  $a, b, c, d, x \in \text{Cls} \supset$

•1  $a \cup b = \neg[(\neg a) \cap (\neg b)]$  Dfp

[ §1 P5.3  $\supset$ .  $ab \supset a$ .  $ab \supset b$ . Transp  $\supset$ .  $\neg a \supset \neg(ab)$ .  $\neg b \supset \neg(ab)$  (1)

(1) . § P1.4  $\supset$ .  $\neg a \cup \neg b \supset \neg(ab)$  (2)

$(\neg a, \neg b) \cap (a, b)$  (2)  $\supset$ .  $a \cup b \supset \neg[(\neg a) \cap (\neg b)]$  (3)

§ P1.3  $\supset$ .  $a \supset a \cup b$ .  $b \supset a \cup b$ . Transp  $\supset$ .  $\neg(a \cup b) \supset \neg a$ .  $\neg(a \cup b) \supset \neg b$ .

Cmp  $\supset$ .  $\neg(a \cup b) \supset (\neg a) \cap (\neg b)$ . Transp  $\supset$ .  $\neg(\neg a) \cap (\neg b) \supset a \cup b$  (4)

(3) . (4)  $\supset$ . P ]

•2  $\neg(a \cup b) = (\neg a) \cap (\neg b)$  [ P.1  $\supset$ . P ]

•3  $a \cap b = \neg[(\neg a) \cup (\neg b)]$  Dfp [  $(\neg a, \neg b) \cap (a, b)$  P.2  $\supset$ . P ]

•4  $\neg(ab) = \neg a \cup \neg b$  [ P.3  $\supset$ . P ]

{ •1-4 DE MORGAN a.1858 p.208; SCHRÖDER a.1877 p.18 }

•5 P2.1.2.3 . P3.1  $\supset$ . § P3.01 { F1897 P215 }

[  $a, b, c \in \text{Cls} \supset$ .  $ab \supset ab$ .  $ac \supset ac$ . Transp  $\supset$ .  $a \cap (ab) \supset \neg b$ .  $a \cap (ac) \supset \neg c$ .

Cmp  $\supset$ .  $a \cap (ab) \cap (ac) \supset \neg b \cap \neg c$ . Transp  $\supset$ .  $a \cap (\neg b \cap \neg c) \supset \neg[(\neg ab) \cap (\neg ac)]$ . P.1.

$\supset$ .  $a \cap (b \cup c) \supset ab \cup ac$  ]

La P.1 exprime l'opération  $\cup$  par les  $\cap$  et  $\neg$ ; dans F1897 on l'a prise comme Df. La P.5 dit que de la •1, et des propriétés de la négation on déduit la § P3.01, qui se présente ici comme Pp.

•6  $a = ab \cup a \cap b$  { LAMBERT a.1781 p.11: «  $a = ax + a|x$  » }

•7  $a \cap b \supset c \equiv a \supset b \cup c$  { PEIRCE a.1867 } { Transp }

[ Transp  $\supset$ :  $a \cap b \supset c \equiv \neg b \cap c \supset \neg a \equiv a \supset b \cup c$  ]

•71  $ab \supset c \cup d \equiv a \cap c \supset d \cup b$  { Transp }

{ PEIRCE a.1880 p.36:  $(a \times b \cap c + d) = (a \times \bar{d} \cap c + \bar{b})$  }

•8  $a \cap b = x \exists (c \in \text{Cls} . a \supset b \cup c . \supset c . x \in c)$  Dfp { F1897 P257 }

[ §1 P8.3  $\supset$ .  $a \cap b = x \exists c \in \text{Cls} . a \cap b \supset c . \supset c . x \in c$

P.7  $\supset$ . » » »  $a \supset b \cup c$  » ]

La P.7 contient dans un membre le signe  $\neg$  qui ne figure pas dans le second; on peut la transformer dans la P.8, qui est une définition possible de l'expression  $a \cap b$ .

Si l'on prend la •8 comme Df, il ne faut plus considérer le signe  $\neg b$ , isolé, qui effectivement ne se rencontre pas dans les applications. En conséquence il faut modifier l'énoncé de quelques P précédentes. P. ex. la P2.4 doit être transformée en  $a, b, c \in \text{Cls} . a \supset b . \supset c \supset b \supset c \cap a$ .

Il y a cet avantage à prendre la •8 comme Df, qu'on supprime la négation du nombre des idées primitives; mais de la •8 comme Df, et des P des §§ précédents on ne sait pas déduire les P de ce §. Voir un essai dans F1897 P258-260.

•9  $(a \cup b) \cap (b \cap x) = a \cap x \cup b \cap x$  { PEIRCE a.1880 p.36 }

•91  $(a \cup b \cap x) \cap (c \cup d \cap x) = a \cap x \cup b \cap d \cap x$  { BOOLE a.1854 }

- 92  $\neg(ax \cup b \neg x) = (\neg a)x \cup (\neg b)(\neg x)$  { SCHRÖDER a.1877 p.19 }  
 ·93  $ab \supset ax \cup b \neg x \supset a \cup b$  { SCHRÖDER a.1891 p.48 }  
 ·94  $a \cup b = a \cup b(\neg a)$  { » a.1890 p.308 }  
 ·95  $a = b \neg c \cup c \neg b \supset b = c \neg a \cup a \neg c$  { JEVONS a.1864 p.61 }

Cet A. a indiqué la fonction  $a \neg b \cup b \neg a$  par  $a \circ b$ ; le signe  $\circ$  correspond au latin *aut*; le signe  $\cup$  à *vel*. Cette opération a de curieuses propriétés développées dans F1895 §3 P24-30, dont la plus importante est la ·95.

- $\wedge$  \* 4.  $a, b \in \text{Cls} \supset$  : ·1  $a \neg a = \wedge$   
 { LEIBNIZ *PhilS.* t.7 p.230 : « seu  $A \neg A \infty N$  » }  
 [ P3·8  $\supset a \neg a = x \neg (x \in \text{Cls} \supset a \supset a \neg c \supset x \neg c)$   
 §1·3 »  $= x \neg (x \in \text{Cls} \supset c \supset x \neg c) = \wedge$  ]  
 ·2  $a \supset b \equiv a \neg b = \wedge$  Dfp { F1888 §6 P2 } { Transp }  
 { LEIBNIZ id. p.212: Omne  $A$  est  $B$ , id est ...  $A$  non  $B$  est non Ens }  
 [ § $\wedge$  P2·1 . §- P3·7 . § $\wedge$  P1·4  $\supset$  :  
 $a \supset b \equiv a \supset b \wedge \equiv a \neg b \supset \wedge \equiv a \neg b = \wedge$  ]  
 ·3  $a = \wedge \equiv a \supset \neg a$  Dfp ·4  $a \supset \neg \wedge$   
 [ Hp . §- P2·1  $\supset \neg a \in \text{Cls}$  . § $\wedge$  P1·2  $\supset \wedge \supset \neg a$  . Transp  $\supset$  . P ]  
 ·5  $a \neg \wedge = a$  [ P·4 . §1 P7·2  $\supset$  . P ]

- $\vee$   $\wedge$  \* 5.  $a, b, c, x \in \text{Cls} \supset$  :  
 ·1  $a = b \equiv a \neg b \cup b \neg a = \wedge$  { SCHRÖDER a.1877 p.175 }  
 ·2  $a = b \neg c . bc = \wedge \supset b = a \neg c$  { BOOLE a.1854 p.35 }  
 ·3  $ax \cup b \neg x = \wedge \equiv b \supset x \supset \neg a$   
 { BOOLE p.101; SCHRÖDER a.1891 P49 }  
 ·4  $ax \cup b \neg x = \wedge \supset ab = \wedge$  { BOOLE a.1854 p.101 }

La classe  $\neg \wedge$  a été indiquée par Peirce, AJ. a.1887 et dans F1889 et suivants, par le signe  $\vee$ , qu'on lit « tout » ou « vrai ». Toute expression  $fx$  obtenue en combinant une classe  $x$  avec des classes données par les signes  $\neg \cup \neg$  est réductible à la forme :  $fx = (f \vee x \cup (f \wedge) \neg x$  due à Boole, et qui présente quelques analogies avec la formule de Taylor.

La P·3 donne la résolution de toute équation logique.

Avec  $m$  classes indépendantes on peut former  $2^m(2^m - 1)$  Cls différentes, et énoncer  $2^m[2^m(2^m - 1) - 2]$  propositions. Si  $m=1$ , on a les 6 P :

$$\begin{array}{llll} a = \wedge & \neg a = \wedge & a \neg a = \wedge & \neg a \neg a = \wedge \\ a \neg a = \wedge & \neg a \neg a = \wedge & a = \wedge \cup \neg a = \wedge & \end{array}$$

Sur deux classes ( $m=2$ ), on peut énoncer 32766 relations.

Voir ce calcul dans RdM. a.1900 p.41.

Nous indiquons par des signes simples les deux relations  $a \supset b$  et  $a = b$ ; quelques A. ont introduit des signes nouveaux pour indiquer d'autres relations moins importantes.

§5  $\exists = (\text{existe})$

$\bigwedge - *$  1.  $a, b \in \text{Cls} \supset: \quad \cdot 0 \quad \exists a \equiv a \equiv \bigwedge \quad \text{Df} \exists$   
 $\cdot 01 \quad \exists ab \equiv \exists(ab) \quad \text{Df}$

Soit  $a$  une Cls;  $\exists a$  signifie « il y a des  $a$ , les  $a$  existent ». Nous exprimons cette idée au moyen des précédentes par la P.0. Ex :

$\exists N^2 \wedge (N^2 + N^2)$  « Il y a des nombres carrés, sommes de deux carrés ».  
 $\S + 7 \cdot 1 \quad \S / 6 \cdot 8$ . La P particulière « quelque  $a$  est  $b$  » s'exprime, sans conventions nouvelles, par  $\exists ab$ .

$\cdot 1 \quad x \varepsilon a \supset \exists a \quad \{ \text{F1889 P53 } \} \quad \{ \text{Ex. : } \S \text{Dvr P1} \cdot 3 \}$   
 $[ \text{Syll } \supset: \quad a \varepsilon \text{Cls} . a = \bigwedge . x \varepsilon a \supset x \varepsilon \bigwedge \quad (1)$   
 $(1) . \S - 2 \cdot 1 . \text{Df } \bigwedge \supset: \quad \text{» » } x \varepsilon - a \quad (2)$   
 $(2) . \text{Transp. Df } \exists \supset. P ]$

De  $x \supset a$  on ne déduit pas  $\exists a$ , si l'on n'est pas assuré que  $\exists x$  (P1.2).

$\cdot 2 \quad a \supset b . \exists a \supset \exists b \quad [ \S \bigwedge 1 \cdot 6 . \text{Transport } \supset. P ]$   
 $\cdot 21 \quad a \supset b \supset: \exists a \supset \exists b \quad \{ \text{Oper } \exists \{ \} \text{ F1895 P116 } \}$   
 « Opérer par  $\exists$  » signifie écrire le signe  $\exists$  en avant des deux membres d'une déduction. On obtient une déduction de même sens.

$\cdot 3 \quad \exists a \supset b \supset: \exists a . \exists b \quad [ P \cdot 2 \supset P ] \quad \{ \text{F1895 } \S 3 \text{ P12 } \}$   
 $\cdot 4 \quad a \supset b \equiv \exists \text{Cls} \wedge \varepsilon \exists (a = bc) \quad \text{Dfp} \quad \{ \text{F1897 P411 } \}$

$*$  2.  $a, b, c \in \text{Cls} \supset:$

$\cdot 1 \quad (x; y) \varepsilon a \supset_{x, y} y \varepsilon b \equiv \exists x \exists [(x; y) \varepsilon a] \supset y . y \varepsilon b$   
 $\{ P \cdot 1 = \text{Elim } x = (\text{éliminer la variable } x) \}$

Supposons que dans une déduction:  $\text{Hp } \supset. \text{Ths} \quad (1)$

l'Hp contienne une variable  $x$ , ou un système de variables, qui ne figure pas dans la Ths; le signe  $\supset$  porte comme indices  $x$  et d'autres variables. Alors la P (1) est réductible à la forme :

(S'il y a des  $x$  vérifiant l'Hp)  $\supset. \text{Ths} \quad (2)$

où le signe  $\supset$  ne porte plus comme indice  $x$ . La transformation de (1) en (2) s'appelle « élimination de  $x$  ». Dans la nouvelle Hp la lettre  $x$  est apparente. Dans plusieurs cas on peut la faire disparaître.

Ex. dans les Dém. de  $\S \supset 1 \cdot 1 \cdot 2 \quad \S \text{Dvr } 1 \cdot 3 \quad \S \theta \cdot 8 \quad \S 1 \cdot 2 \quad \S \text{vet } 3 \cdot 11$ .

$\cdot 2 \quad \exists x \exists y \exists [(x; y) \varepsilon a] \equiv \exists y \exists x \exists [(x; y) \varepsilon a] \equiv \exists a$

Soit une relation ou condition entre les variables  $x, y$ , que nous représentons par  $(x; y) \varepsilon a$ . Alors dans la P « il y a des  $x$  tels qu'il y a des  $y$  qui vérifient la condition donnée » on peut permuter les deux variables. On peut la transformer aussi en « il y a des couples  $(x; y)$  qui satisfont à la condition ».



§6  $t =$  (égal à)

$$\cdot 0 \quad tx = yz(y=x) \} = (\text{égal à } x) \quad \text{Df } t$$

$$\cdot 01 \quad y \varepsilon tx \text{ .} = y \varepsilon (tx) : a \supset tx \text{ .} = a \supset (tx) : a = tx \text{ .} = a = (tx) \quad \text{Df}$$

Dans quelques cas il est utile de décomposer le signe  $=$  (est égal à), dans le signe  $\varepsilon$  (est), et dans un nouveau signe  $t$  (égal à). Ce signe  $t$  est l'initiale du mot *toos*. En conséquence  $tx$  désigne la classe formée par l'objet  $x$ , et  $tx \cup ty$  la classe composée des objets  $x$  et  $y$ .

$\neg tx$  signifie « différent de  $x$  ».

Ex.  $Np \neg t2 \supset 2N+1$

« tout nombre premier différent de 2 est impair ». Opérons par  $x\varepsilon$  (§1.4.1), par Distrib.  $\varepsilon, \cap$  (§1.5.1), et Comm.  $(\varepsilon, \neg)$  (§-1.5). Elle devient:

$$x \varepsilon Np \text{ .} x \neg = 2 \text{ .} \supset x \varepsilon 2N+1$$

Transposons:  $x \varepsilon Np \text{ .} \supset x = 2 \text{ .} \cup x \varepsilon 2N+1$ .

Ex.:  $\S+8.3.6$  §R 31.1.2 37.41 §P 35 §Np 3.21 9.72 §Q 1.3 2.0.2.

Les idées  $x$  et  $tx$  sont différentes; si on les confond, par les P.1.2 on arrive à confondre les trois relations  $\varepsilon$ ,  $=$ ,  $\supset$ .

$$\cdot 1 \quad y \varepsilon tx \text{ .} = y = x \quad [ = P.0 ]$$

$$\cdot 2 \quad a \varepsilon Cls \text{ .} \supset x \varepsilon a \text{ .} = tx \supset a \quad \text{Dfp}$$

$$[ \S 1 P10.5 \supset a \varepsilon Cls \text{ .} x \varepsilon a \text{ .} y \varepsilon tx \text{ .} \supset y \varepsilon a \quad (1)$$

$$(1) \text{ . Export. } \supset \text{ .} a \varepsilon Cls \text{ .} x \varepsilon a \text{ .} \supset y \varepsilon tx \text{ .} \supset y \text{ .} y \varepsilon a \quad (2)$$

$$(2) \text{ . Oper } y\varepsilon \text{ .} \supset a \varepsilon Cls \text{ .} x \varepsilon a \text{ .} \supset tx \supset a \quad (3)$$

$$\S 1 P10.1 \supset x \varepsilon tx \quad (4)$$

$$(4) \text{ .} \supset a \varepsilon Cls \text{ .} tx \supset a \text{ .} \supset x \varepsilon tx \text{ .} tx \supset a \text{ .} \supset x \varepsilon a \quad (5)$$

$$(3) (5) \supset P ]$$

La P.2 exprime la P singulière  $x \varepsilon a$  sous la forme d'une P universelle, contenant le signe  $t$ .

$$\cdot 3 \quad tx = ty \text{ .} = x = y \quad [ tx = ty \text{ .} tx \supset ty \text{ .} ty \supset tx \text{ .} = x \varepsilon ty ]$$

$$\cdot 4 \quad a \varepsilon Cls \text{ .} \supset a = tx \text{ .} = x \varepsilon a : y \varepsilon a \text{ .} \supset y = x$$

$$\cap \quad \cdot 5 \quad a \varepsilon Cls \text{ .} \supset x, y \varepsilon a \text{ .} = tx \cup ty \supset a \quad \text{Dfp}$$

$$\Lambda - \quad \cdot 6 \quad a \varepsilon Cls \text{ .} \supset \neg a = x\varepsilon(tx \cap a = \Lambda) \quad \text{Dfp}$$

$$[ \neg a = x\varepsilon(x\varepsilon \neg a) = x\varepsilon tx \supset \neg a = x\varepsilon tx \cap a = \Lambda ]$$

Cette P exprime la négation au moyen des idées  $\Lambda$  et  $t$ , définies par les seules idées du §1. Nous pouvons déduire une des P fondamentales du - :

$$\cdot 61 \quad P.6 \supset \S - P.2.4$$

$$[ a, b \varepsilon Cls \text{ .} a \supset b \text{ .} \supset a \cap tx \supset b \cap tx$$

$$» » » (b \cap tx = \Lambda) \supset (a \cap tx = \Lambda)$$

$$» » » x\varepsilon( » ) \supset x\varepsilon( » ) \text{ .} \supset \neg b \supset \neg a ]$$

$$\exists \quad \cdot 7 \quad a \varepsilon Cls \text{ .} \supset x \varepsilon a \text{ .} = \exists tx \cap a \quad \text{Dfp} \quad [ P.6 \supset P ]$$

$$\cdot 8 \quad \exists tx \quad [ x \varepsilon tx \text{ .} \S 1.1 \supset P ] \quad \} \cdot 0.4.2.7 \text{ F1895 p.116.}$$

$$\cdot 5.6 \text{ F1897 P423, 425. } \cdot 3.4.8 \text{ PADOA RdM. t.6 p.117 } \}$$





## §8 : = (avec)

$a, b, c, d \in \text{Cls}$   $\cdot 0$   $a:b = (x;y) \exists (x \varepsilon a \wedge y \varepsilon b)$  Df {F1899}

$\cdot 01$   $(x;y) \varepsilon (a:b) \text{ .} \text{=} x \varepsilon a \wedge y \varepsilon b$  Dfp »

$\cdot 02$   $a:b:c = (a:b):c = (x;y;z) \exists (x \varepsilon a \wedge y \varepsilon b \wedge z \varepsilon c)$  Df »

$a:b$ , qu'on peut lire «  $a$  avec  $b$  », désigne l'ensemble des couples formés par un objet de la classe  $a$  avec un objet de la classe  $b$  (tandis que  $a;b$  désigne le couple dont les deux éléments sont les classes  $a$  et  $b$ ).

Ex. §Num 46 :  $\text{Num } N = \text{Num}(N:N)$

« les nombres naturels sont aussi nombreux que leurs couples ».

§lim 19.1.2.6 §/11.1 §Dtrm.

$\cdot 1$   $(a:b) \supset (c:d) \text{ .} \text{=} a \supset c \wedge b \supset d$

$\cdot 11$   $(a:b) = (c:d) \text{ .} \text{=} a = c \wedge b = d$

$\cdot 12$   $(a:b) = (c:d) \text{ .} \text{=} (a;b) = (c;d)$

$\cdot 13$   $(a \cap c):(b \cap d) = (a:b) \cap (c:d)$

$\cdot 2$   $(a \cup c):b = (a:b) \cup (c:b) \text{ .} \text{ } a:(b \cup d) = (a:b) \cup (a:d)$  {Distrib(: ,  $\cup$ )}

$\cdot 21$   $(a \cup c):(b \cup d) = (a:b) \cup (c:b) \cup (a:d) \cup (c:d)$

$\exists \cdot 3$   $\exists (a:b) \text{ .} \text{=} \exists a \wedge \exists b$

$\iota \cdot 4$   $(\iota x : \iota y) = \iota (x;y) \text{ .} \text{ } x;y = \iota (\iota x : \iota y)$

$\cdot 41$   $\iota x : \iota y = \iota z : \iota t \text{ .} \text{=} x;y = z;t$

{ $\cdot 4-41$  PADOA RdM. t.6 p.120, a.1900 }

## §10 f j = (fonction)

\* 1.  $a, b, c \in \text{Cls} \Rightarrow$ •0  $u \varepsilon a \dot{b} := x \varepsilon a \Rightarrow x \dot{u} \varepsilon b$  Df•01  $u \varepsilon b \dot{a} := x \varepsilon a \Rightarrow x \dot{u} \varepsilon b$  Df*Note sur les fonctions.*

On peut prononcer « fonction » le signe f et « et » le signe j.

Ces signes permettent de représenter par les symboles idéographiques les idées de « fonction », « correspondance », « opération » etc.

P•0 Soient  $a$  et  $b$  des classes. Nous dirons que  $a$  est un  $a \dot{b}$ , lorsque, le signe  $u$  écrit après un individu quelconque de la classe  $a$  produit un  $b$  (P•01) et que  $u$  est un  $b \dot{a}$ , lorsque le signe  $u$  écrit en avant d'un  $a$  produit un  $b$ .

Dans les traités d'Analyse on dit que  $a$  est la classe des valeurs de la variable indépendante, et la classe  $b$  contient les valeurs de la fonction.

P. ex. soit  $x$  un N;  $x!$  factorielle de  $x$  est un N; donc  $! \varepsilon N \dot{N}$ . C'est le seul exemple de fonction j répandu en Analyse.

Les expressions  $\div a$ ,  $\rightarrow a$ ,  $\dot{a}$ , ont les significations « ajouter  $a$  », « retrancher  $a$  », « diviser par  $a$  », et l'on a les P § 1•11, § 1•13, § 1•12. Ainsi se présentent naturellement les nombres négatifs et les fractions nées.

Dans l'usage commun et dans le Form., le signe de fonction précédé, en général, la variable.

Ex: mod  $\text{sgn } E \beta \text{ Clf nt dt } \phi \log \sin \text{ cos B.}$

Ici les valeurs de la variable et de la fonction sont des nombres de différentes espèces: N, n, R, Q, q, q'.

Les signes de fonction Num, max, min, Div, mlt,  $!$ ,  $\dot{}$ , précèdent des classes de nombres; la valeur de la fonction est un nombre, en général.

Les signes Mod  $\dot{\lambda}$   $\delta$  font correspondre des classes de nombres à d'autres classes.

Une fonction de deux variables est quelquefois représentée par un signe écrit devant le couple des variables. Ex. quot, rest, Cl, nq.

Dans d'autres cas on place le signe de fonction entre les deux variables; ex.  $a \dot{+} b$ ,  $a \dot{-} b$ ,  $a \dot{\times} b$ ,  $a \dot{/} b$ ,  $a \dot{N} b$ ; ici  $a, b$ , et la valeur de la fonction sont des nombres. Dans  $a \dot{=} b$ ,  $a \dot{=} b$ ,  $a \dot{<} b$ ,  $a \dot{>} b$ , la valeur de la fonction est une Cls. Ont la même forme les relations:  $a \dot{=} b$ ,  $a \dot{=} b$ ,  $a \dot{<} b$ ,  $a \dot{>} b$ ; les signes de relation sont des signes de fonction, dont la valeur est une proposition.

Quelquefois on écrit la variable comme indice à la fonction; nous conviendrons que  $a_1, a_2, \dots$  ne diffèrent que par la forme, de  $a1, a2, \dots$ .

Plusieurs A. ont aujourd'hui l'habitude d'enfermer la variable entre  $\dot{}$ ; mais dans la formule  $a \dot{x}$  les  $\dot{}$  n'ont pas la valeur expliquée par §1 P1•2.

car une lettre seule ne doit pas être enfermée. Elles ne sont pas nécessaires, puisqu'on écrit  $\log x$  et non  $\log(x)$ ,  $f(x+h)$  et non  $f(x+h)$ ; elles ne se trouvent pas dans Lagrange, Abel, ... Dans le langage ordinaire la variable est mise au génitif; c'est cela qu'on veut indiquer par les  $()$ ; Euler-PetrNC. a.1768 t.13 p.63, Legendre a.1797 p.135, ... écrivent  $f';x$ ,  $f';(x+h)$ , où les  $;$  correspondent à « de ». Nous supposons le mot « de » incorporé dans le signe de fonction; ainsi  $\log x$ , signifie « le logarithme de ».

Les signes  $f$  et  $\sum$  se présentent nécessairement lorsqu'on indique par une lettre un signe de fonction; c'est-à-dire lorsqu'on considère une expression dont la valeur dépend de la nature d'une fonction, comme  $\sum H \lim D \text{trm} D S$ .

P. ex:  $\sum f'u$ , où  $u \in \text{Cls}$ , et  $f \in qf'u$ , c'est-à-dire  $f$  est une fonction numérique définie dans la classe  $u$ , indique la somme des valeurs de  $f$ , lorsque la variable varie dans la classe  $u$ .

Pour quelques formes de la classe  $u$  la fonction  $f$  dans l'usage commun a des noms particuliers:

$u \in N, \supset, qf'1 \cdots n =$  (succession de  $n$  quantités)

$qf'1 \cdots n : 1 \cdots n =$  (fonction numérique de deux variables qui prennent les valeurs de 1 à  $n =$  lettre qui, munie de deux indices variables de 1 à  $n$  représente une quantité)  $=$  matrice d'un déterminant d'ordre  $n$ .

$qf'N =$  (série, ou suite, de quantités) §Lim §lim.

$qf'N:N =$  (série double) §lim P19.

$qf'a \supset b =$  (fonction réelle définie dans l'intervalle de  $a$  à  $b$ ) §cont P2.

On pourrait convenir d'écrire toujours le signe de fonction en avant de la variable  $f()$ , ou toujours après  $(f)$ ; nous écrirons les  $P$  sous une seule des deux formes; mais nous conservons tous deux les signes  $f$  et  $\sum$ .

\*1  $u \in a \uparrow b, x, y \in a, x = y, \supset, xu = yu$

[ §1 P10-1,  $\supset, x \in z \uparrow zu = xu$ , Hp,  $\supset, y \in z \uparrow zu = xu$ ,  $\supset$ , Ths ]

\*2  $u \in a \uparrow b, c \supset a, \supset, u \in c \uparrow b$  [ Hp,  $x \in c, \supset, x \in a, \supset, xu \in b, \supset$ , P ]

\*3  $u \in a \uparrow b, b \supset c, \supset, u \in a \uparrow c$

[ Hp,  $\supset, x \in a, \supset, xu \in b, \supset, xu \in c, \supset$ , Ths ]

\* 2.  $a, b, c, d \in \text{Cls}, \supset, :$

\*0  $u \in a \uparrow b, r \in b \uparrow c, x \in a, \supset, xur = (xur) = xur$  Df

\*01  $u \in b \uparrow a, r \in c \uparrow b, x \in a, \supset, (ru)r = r(ru) = rru$  Df

\*1  $u \in a \uparrow b, r \in b \uparrow c, \supset, ur \in a \uparrow c$

\*2  $u \in a \uparrow b, r \in b \uparrow c, w \in c \uparrow d, x \in a, \supset, (ru)(rc) = (xur)w$

L'opération  $ru$ , définie par la P01 est dite « le produit des opérations  $u$  et  $r$  ». Dans le calcul différentiel on l'appelle « fonction de fonction ». Si  $u$  et  $v$  sont des mouvements, et en général des put f'put,  $ru$  est dit le mouvement composé. L'expression  $ruv$  est associative.

} 1-0-3, 2-0-2 F1895 p.6 }





## §13 sim rep idem

$a, b, c \in \text{Cls} \rightarrow \supset$ .

\*0  $a \varepsilon (bfa) \text{sim} \rightarrow \equiv: a \varepsilon bfa : x, y \varepsilon a, ux = uy \rightarrow x, y, x = y \rightarrow \text{Df}$

\*1  $a \varepsilon (bfa) \text{sim} \rightarrow c \supset a \rightarrow \supset: a \varepsilon (bfa) \text{sim}$

\*2  $\rightarrow \rightarrow \rightarrow b \supset c \rightarrow \supset: a \varepsilon (cfa) \text{sim}$

\*3  $\rightarrow \rightarrow \rightarrow x, y \varepsilon a \rightarrow \supset: x = y \rightarrow \equiv: ax = ay$

\*4  $\rightarrow \rightarrow \rightarrow c \varepsilon (afb) \text{sim} \rightarrow \supset: ca \varepsilon (afb) \text{sim}$

Le signe « sim » signifie « correspondance semblable (similis) ».

Ex.: § 9-2-5, § 7-3-1.

\*5  $a \varepsilon (bfa) \text{rep} \rightarrow \equiv: a \varepsilon bfa \text{sim} \rightarrow b \supset a \rightarrow \text{Df}$

\*6  $a \varepsilon (afb) \text{rep} \rightarrow c \varepsilon (afb) \text{rep} \rightarrow \supset: ca \varepsilon (afb) \text{rep}$

\*7  $a \varepsilon (bfa) \text{sim} \rightarrow \supset: a \varepsilon (afb) \text{rep}$

} \*0-7 F1895 p.116, F1897 P521 {

Le signe « rep » signifie « correspondance réciproque ».

Ex. § Num P-0:  $a, b \in \text{Cls} \rightarrow \supset: \text{Num} a = \text{Num} b \rightarrow \equiv: a \varepsilon (bfa) \text{rep}$

§Σ P1-3 §lin P18-2-3 ...

On suppose écrites les formules correspondantes pour le signe «.

\*8  $\text{idem} \rightarrow x \rightarrow \equiv: x \rightarrow \text{Df}$  } F1899 {

$\text{idem} \varepsilon afa \rightarrow \text{idem} \varepsilon afa \text{sim} \rightarrow \text{idem} \varepsilon afa \text{rep} \rightarrow \text{idem} \rightarrow a \rightarrow$

$\text{idem}$  représente l'identité: telles sont les opérations arithmétiques  $=0, -0, +1, /1, \backslash 1, \backslash 1, \backslash 1, \dots$ . Dans la théorie des Substitutions l'identité est indiquée simplement par 1. Ex. §Σ P21-4, §res -11.

## §14 Variab F Funct

\*1  $a, c \in \text{Cls} \rightarrow f \varepsilon cfa \rightarrow x \varepsilon a \rightarrow \supset: (f;a).x = fx \rightarrow \text{Df}$

\*2  $\text{---} \text{---} \text{---} \rightarrow \text{---} \text{---} \rightarrow \supset: \text{Variab}(f;a) = a \rightarrow \text{Df}$

\*3  $\text{---} \text{---} \text{---} \rightarrow \supset: cFa = g\beta \exists a \rightarrow fa \rightarrow f\beta [g = (f;a)] \rightarrow \text{Df}$

\*4  $\text{Funct} = g\beta \exists a (a;c)\beta [a, c \in \text{Cls} \rightarrow g \varepsilon cFa] \rightarrow \text{Df}$

\*5  $f, g \varepsilon \text{Funct} \rightarrow \supset:$

$f = g \rightarrow \equiv: \text{Variab} f = \text{Variab} g : x \varepsilon \text{Variab} f \rightarrow \supset: fx = gx \rightarrow \text{Df}$

\*6  $a, c \in \text{Cls} \rightarrow \supset: cFa \supset cfa \rightarrow \text{---} \text{---} \text{---} [P-1, \S \text{P1-01} \rightarrow \supset: P]$

\*7  $a \in \text{Cls} \rightarrow x \varepsilon a \rightarrow \supset: \{a(aFa)\}x = a \rightarrow \text{---} \text{---} \text{---} \}$  \*1-7 F1899 {

Soient  $u$  et  $v$  des Cls; et  $f \in vfu$ . Si l'on donne l'opération  $f$ , la classe dans laquelle l'opération est définie n'est pas déterminée; car si l'opération est définie dans la classe  $u$ , elle est aussi définie dans toute classe contenue dans  $u$ , par la §f P-2, et il y a toujours la possibilité de la définir dans toute classe différente. P. ex. l'opération « mod » dans §mod P-0 est définie sur les nombres relatifs; en conséquence elle est définie sur les nombres positifs, et dans ce cas coïncide avec l'identité; ensuite la même opération est définie sur les nombres complexes d'ordre quelconque, sur les substitutions, sur les vecteurs, et on est toujours en droit de l'employer dans des nouveaux cas, présentant quelque analogie, et jamais de contradiction, avec les anciens.

Dans quelques cas il faut considérer en même temps une opération  $f$  et une classe  $u$  dans laquelle cette opération est définie; c'est à dire le couple  $(f;u)$ . On rencontre ce couple dans les formules  $\Sigma(f;u)$ ,  $\Pi(f;u)$ , qui représentent la somme, ou le produit des valeurs de la fonction  $f$ , lorsque la variable prend toutes les valeurs dans la classe  $u$ , et dans  $S(f;u)$ , qui représente l'intégrale de  $f$ , étendue au domaine  $u$  de variabilité.

P-1. A l'expression  $(f;u)x$ , où  $u$  est une classe,  $f$  une opération sur les  $u$ , et  $x$  un  $u$ , nous donnons la signification  $fx$ .

P-2. Par variabilité de  $(f;u)$  nous entendons la classe  $u$ .

P-3.  $vFu$  ( $v$  fonction définie des  $u$ ) indique les couples formés d'une  $vfu$  et de la classe  $u$ .

P-4. « Fmet » indique toutes les expressions de la forme  $vFu$ , où  $u$  et  $v$  sont des classes.

P-5. Deux Fonctions définies sont égales, lorsqu'elles ont la même variabilité, et dans cette variabilité produisent des résultats égaux.

P-6. Toute F est f. Nous parlerons donc des Fonctions sim, rep, etc.

Ex:  $(\text{mod}, Q) = (\text{idem}, Q)$

« Les fonctions mod et idem, dans la classe Q, coïncident ».

Ex. §Num 7 §II 3-2 10, §! 4-0-2 §D 1-2 §qa 1-0 42-0 §Dtrm §Subst.

## §15 $^{-1}$ (inversion)

$a, b \in \text{Cls} \cdot u \in (bFa) \text{rep} \cdot \supset$

·0  $u^{-1} = \iota (aFb) \wedge r3[r u = (\text{idem}, a)]$  Df

·1  $u^{-1}u = (\text{idem}, a)$  ·2  $x \in a \cdot \supset \cdot u^{-1}ux = x$  ·3  $(u^{-1})^{-1} = u$

·4  $a, b, c \in \text{Cls} \cdot u \in (bFa) \text{rep} \cdot v \in (cFb) \text{rep} \cdot \supset \cdot (ru)^{-1} = u^{-1}r^{-1}$

·5  $u \in \text{Cls} \cdot u, r \in (aFa) \text{rep} \cdot ur = ru \cdot \supset \cdot u^{-1}r = r u^{-1}$

·6  $u^{-1}r^{-1} = r^{-1}u^{-1}$

Il faut considérer l'exposant  $-1$  comme un signe simple pour indiquer l'inversion. Voir Ft897 p.61. Cette théorie n'est pas appliquée dans la suite, où l'on définira directement  $\sin^{-1}$  ...



## SECONDE PARTIE

## ARITHMÉTIQUE

§20 0 N<sub>0</sub> +

## \* 1. Idées primitives

1 0 = « zéro »

2 N<sub>0</sub> = « nombre entier, positif ou nul »3  $a \in N_0, \bigcup, a+$  = « le nombre qui vient après  $a$  », « le successeur de  $a$  », «  $a$  plus ».*Notes*

Peut-on définir le nombre? La réponse dépend de l'ensemble des idées qu'on suppose connues. Si l'on présume seulement celles représentées par les signes de Logique Cls,  $\varepsilon$ ,  $\bigcup$ ,  $\in$ ,  $=$ , du §1, alors la réponse est négative. Nous introduisons les idées primitives 0, N<sub>0</sub>, +, qui combinées avec les signes de logique, nous donnent la définition symbolique de toutes les idées d'Arithmétique, d'Algèbre et d'Analyse infinitésimale.

Le § Num est indépendant de ces idées primitives. Le § vet en contient de nouvelles.

Selon l'école de Pythagore, le premier nombre (*Ἀριθμός*) est 2. Cette signification se conserva pendant le moyen âge.

L'usage commun est de commencer la numération par 1. Ces nombres ont été indiqués par N dans F1889-1895; maintenant par N<sub>1</sub>.

Il est plus commode de commencer par 0. Le signe N<sub>0</sub>, qu'on peut lire « nombre », doit être considéré comme un signe unique, qui représente une idée simple, bien qu'il soit typographiquement composé.

Le signe + représente d'abord l'idée simple de « successif ». Après la P33 au lieu de  $a+$  nous écrirons  $a+1$ , selon l'usage ordinaire.

Sur l'origine du signe + voir § — note.

Sur l'analyse des idées fondamentales de l'Arithmétique voir F1889, RdM, t.1 p.90, F1898.

## \* 2.

1 = 0+ . 2 = 1+ . 3 = 2+ . 4 = 3+ . 5 = 4+ .

6 = 5+ . 7 = 6+ . 8 = 7+ . 9 = 8+ . X = 9+ Df

### Note sur les chiffres

Ces P définissent les chiffres 0, 1, ... 9. Le signe X des Romains pour indiquer le nombre « dix » est nécessaire jusqu'aux conventions sur la numération (§ΣP10), lesquelles suivent nécessairement la multiplication et l'élevation à une puissance.

Sans ces conventions, les nombres qui suivent 0 sont exprimés par

$$0+, \quad 0+++, \quad 0++++, \text{ etc.}$$

Si l'on remplace les + par des barres, et si on sous-entend le 0, ils seront indiqués par

$$\text{I} \quad \text{II} \quad \text{III} \quad \dots$$

par la répétition d'un même signe ou comme réunion des unités.

C'est la notation primitive des nombres, qui date des temps les plus reculés, et est encore en usage dans des cas spéciaux, comme la taille de la boulangère, les jeux de dés, de dominos, de cartes, la cloche qui sonne les heures.

Dans les hiéroglyphes des anciens Égyptiens, les nombres 1, 2, ... 9 sont figurés par 1, 2, ...  $b$  barres. Puis il y a le signe  $\cap$  pour représenter 10, et des signes pour représenter 100, 1000, etc.

Dans les écritures hiéroglyphiques et démotiques (a. —2000), déformations de l'écriture hiéroglyphique, les scribes ont réuni ces barres, et ont formé des signes simples, ou chiffres, pour représenter les nombres de 1 à 9; comme on voit encore dans nos chiffres 2 et 3, qui proviennent évidemment de la réunion de deux  $\equiv$  ou de trois barres  $\equiv$ . Ces deux chiffres ont, dans le calendrier égyptien, presque la même forme que chez nous et chez les indiens. Chez les arabes ils résultent de barres verticales, et ont à peu près la forme  $\pi$  et  $\omega$ .

Les chiffres 4 et 9 se ressemblent encore chez les différents peuples.

La forme des chiffres 5, 6, 7, 8 a varié beaucoup chez les Égyptiens, les Indiens, les Arabes, et chez nous.

Voir §ΣP10 et F1898.

✱

$$\begin{aligned} & \text{'1 } a \in N_0 \text{ } \supset \text{ } a+0=a \\ & \text{'2 } a, b \in N_0 \text{ } \supset \text{ } a+(b+)= (a+b)+ \\ & \text{'3 } a \in N_0 \text{ } \supset \text{ } a+1=a+ \\ & \text{'4 } a, b \in N_0 \text{ } \supset \text{ } a+(b+1)= (a+b)+1 \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \text{Df+} \\ [0 \mid b \text{ P } \cdot 2 \supset \text{ P}] \\ [ \text{P } \cdot 2 \cdot 3 \supset \text{ P}] \end{array} \right\}$$

Les P1-2 définissent la somme par induction.

Soit  $a$  un  $N_0$ :  $a=0$  signifie  $a$ ; et, en supposant connue la somme de  $a$  avec un nombre  $b$ , la somme de  $a$  avec le succésif de  $b$  est, par définition, le nombre succésif de  $a+b$ .

Si dans la P-2 on donne à  $b$  successivement les valeurs 0, 1, 2, ..., on a

$$a+1 = a+ \quad a+2 = a++ \quad a+3 = a+++ \quad \dots$$

En général  $a+b$ , qu'il faut imaginer décomposé en  $a$  et  $+b$ , signifie «  $a$  suivi de  $b$  signes + » ou « le succésif d'ordre  $b$  de  $a$  ».

# \* 4. Propositions primitives

·0  $N_0 \in \text{Cls}$  Pp ·1  $0 \in N_0$  Pp

·2  $a \in N_0 \supset a+ \in N_0$  Pp

·3  $s \in \text{Cls} : 0 \in s : x \in s \supset x+ \in s \supset N_0 \supset s$  Pp

} P·3 = Induct = « loi d'induction » {

} PASCAL a.1654 t.3 p.298 :

■ Premier lemme ... cette proposition se rencontre dans la seconde base...

Deuxième ... si cette proposition se trouve dans une base quelconque, elle se trouvera nécessairement dans la suivante.

D'où il se voit qu'elle est nécessairement dans toutes les bases. = {

Les idées primitives sont déterminées par les propositions primitives que nous venons d'énoncer et par les P·2 P·4, desquelles découlent toutes les P de l'Arithmétique.

Dans la lecture des propositions il convient de se rapprocher autant que possible du langage ordinaire. On lira les P4 p. ex. comme il suit :

·0  $N_0$  est une classe ·1 à laquelle appartient 0

·2 « Tout nombre est suivi par un nombre. »

·3 « Soit  $s$  une classe; supposons que 0 appartienne à cette classe; et que toutes les fois qu'un individu appartient à cette classe, son suivant  $y$  appartienne aussi; alors tous les nombres appartiennent à cette classe.

On appelle « principe d'induction » cette Pp. On peut aussi la lire : « Si une proposition est vraie pour le nombre 0, et si, étant vraie pour le nombre  $x$ , elle est aussi vraie pour le nombre  $x+$ , elle est vraie en général ». Ou encore : «  $N_0$  est le plus petit système qui satisfasse aux conditions ·0-1-2. »

La P·0, non nécessaire selon les conventions de F1889, le devient par les conventions actuelles. Voir §1 P1·7 note.

Une condition  $a$  contenant une variable  $x$ , ou un système de variables, est dite « indépendante » de la condition  $b$ , si  $\exists x \exists b(a)$ , « existent des  $x$  qui satisfont à la condition  $b$  et non à la  $a$  ».

Les Pp sont des conditions entre les objets non définis 0,  $N_0$  +, qu'on peut considérer comme des variables; on peut donc parler de leur indépendance.

Si l'on remplace  $N_0$  par  $R_0$  (nombre rationnel positif ou nul), la condition ·3 n'est pas vérifiée, bien que les précédentes le soient. En effet il ne suffit pas de reconnaître qu'une formule est vraie pour 0, et que étant vraie pour  $a$ , elle le soit aussi pour  $a+1$ , pour conclure qu'elle est vraie pour toutes les valeurs rationnelles de la variable. Autrement dit :

$R_0 \in \text{Cls} : 0 \in R_0 : a \in R_0 \supset a+1 \in R_0$

mais la proposition :

$s \in \text{Cls} : 0 \in s : x \in s \supset x+1 \in s \supset R_0 \supset s$

n'est pas vraie, car on a une absurdité si l'on remplace  $s$  par  $N_0$ .

Donc la P·3 est indépendante des précédentes.

## \* 5.

$$\begin{aligned} \cdot 1 \quad & a, b \in N_0 \rightarrow a+b \in N_0 \\ & [ \text{Hp} \cdot b=0 \cdot \text{Df}+ \rightarrow \text{Ths} \quad (1) \\ & \text{Hp} \cdot a+b \in N_0 \cdot \text{Df}+ \cdot \text{Pp}2 \rightarrow a+(b+1) \in N_0 \quad (2) \\ & (1) \cdot (2) \cdot \text{Induct} \rightarrow \text{P} ] \end{aligned}$$

« La somme de deux nombres est un nombre déterminé.

En effet, quel que soit le nombre  $a$ , cela est vrai si  $b=0$  par la P3.1 ; si la somme  $a+b$  est définie pour une valeur de  $b$ , par la P3.2 elle sera aussi définie si l'on remplace  $b$  par son successeur ; donc, d'après le principe d'induction, la somme est définie en général. »

$$\begin{aligned} \cdot 2 \quad & a, b, c \in N_0 \rightarrow a+b+c = (a+b)+c \quad \text{Df} \\ \cdot 3 \quad & a, b, c \in N_0 \rightarrow a+(b+c) = a+b+c \quad \{ \text{Assoc}+ \} \\ & [ \text{Hp} \cdot c=0 \rightarrow \text{Ths} \quad (1) \\ & \text{Hp} \cdot (a+b)+c = a+(b+c) \cdot \text{Df}+ \rightarrow (a+b)+(c+1) = [(a+b)+c]+1 \\ & \quad = [a+(b+c)]+1 = a+[b+c+1] = a+(b+(c+1)) \quad (2) \\ & (1) \cdot (2) \cdot \text{Induct} \rightarrow \text{P} ] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cdot 4 \quad & a \in N_0 \rightarrow 0+a = a \\ & [ \text{Df}+ \rightarrow 0+0 = 0 \quad (1) \\ & a \in N_0 \cdot 0+a = a \cdot \text{Df}+ \rightarrow 0+(a+1) = 0+a+1 = a+1 \quad (2) \\ & (1) \cdot (2) \cdot \text{Induct} \rightarrow \text{P} ] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cdot 41 \quad & a \in N_0 \rightarrow 1+a = a+1 \\ & [ \text{Df}+ \cdot \text{P}4 \rightarrow 1+0 = 0+1 = 1 \quad (1) \\ & a \in N_0 \cdot 1+a = a+1 \rightarrow 1+(a+1) = 1+a+1 = a+1+1 \quad (2) \\ & (1) \cdot (2) \cdot \text{Induct} \rightarrow \text{P} ] \\ \cdot 5 \quad & a, b \in N_0 \rightarrow a+b = b+a \quad \{ \text{Comm}+ \} \\ & [ \text{Hp} \cdot b=0 \cdot \text{P}4 \rightarrow \text{Ths} \quad (1) \\ & a, b \in N_0 \cdot a+b = b+a \rightarrow a+(b+1) = (a+b)+1 \quad (2) \\ & \quad \gg \cdot \text{P}41 \rightarrow (b+a)+1 = 1+(b+a) \\ & \quad \text{Associat}+ \rightarrow \quad \quad = 1+b+a \\ & \quad \text{P}41 \rightarrow \quad \quad = b+1+a \quad (3) \\ & (1) \cdot (2) \cdot (3) \cdot \text{Induct} \rightarrow \text{P} ] \end{aligned}$$

$$\cdot 6 \quad a, b, c \in N_0 \rightarrow a+b+c = a+c+b \quad [ \text{Assoc}+ \cdot \text{Comm}+ \rightarrow \text{P} ]$$

## \* 6.

$$\begin{aligned} \cdot 1 \quad & a, b \in N_0 \cdot a=b \rightarrow a+1 = b+1 \\ & [ \text{Hp} \cdot \S 1 \text{ P10.1} \rightarrow a+1 = a+1 \quad (1) \\ & \quad \cdot (1) \rightarrow a \in x \ni a+1 = x+1 \quad (2) \\ & \quad \cdot (2) \cdot \S 1 \text{ P10.5} \rightarrow b \in x \ni a+1 = x+1 \quad (3) \\ & \quad \gg \cdot (3) \rightarrow \text{Ths} ] \end{aligned}$$

$$\cdot 2 \quad a, b \in N_0, a+1 = b+1 \Rightarrow a = b \quad \text{Pp}$$

« Deux nombres suivis par le même nombre sont égaux. »

Un système périodique, précédé d'une antipériode; comme la suite 0, 1, 1, 1, ... satisfait à toutes les P précédentes, mais non à la nouvelle Pp.

$$\cdot 3 \quad a, b \in N_0, \Rightarrow a = b \Rightarrow a+1 = b+1 \quad [P \cdot 1, P \cdot 2 \Rightarrow P]$$

$$\cdot 4 \quad a, b, c \in N_0, \Rightarrow a+c = b+c \Rightarrow a = b \quad \text{Ex. §- P1.1 Dm}$$

$$[ \text{Hp} : c=0 \Rightarrow \text{Ths}$$

$$\text{Hp} : a=b \Rightarrow a+c=b+c : P \cdot 3 \Rightarrow a=b \Rightarrow a+(c+1)=b+(c+1) \quad (1)$$

$$(1) \cdot 2 \cdot \text{Induct} \Rightarrow P ]$$

$$\exists \quad * \quad 7. \quad a, r, w \in \text{Cls} N_0, a \in N_0, \Rightarrow$$

$$\cdot 1 \quad a+a = x \exists [ \exists u \wedge y \exists (x = y+u) ] = a+(+a) \quad \text{Df}$$

$$\cdot 2 \quad a+a = \quad \quad \quad (x = a+y) = (a)+r \quad \text{Df}$$

$$\cdot 3 \quad a+c = x \exists [ \exists y \exists z \exists y \exists u, z \in r, x = y+z ] \quad \text{Df}$$

$$\cdot 31 \quad a+c = (x+y) \wedge (x+y) = (a)+r \quad \text{Dfp}$$

$$\cdot 4 \quad a+a = a+a = a+a$$

$$\cdot 5 \quad a+c = c+a \quad \cdot 6 \quad a+(r+u) = (a+r)+u = a+r+u$$

$$\cdot 7 \quad N_0 + N_0 = N_0$$

Nous définissons ici la somme d'un nombre et d'une classe de nombres, et de deux classes. Ex: P8, §- P1, § P5, ...

$$\cup \quad * \quad 8.$$

$$\cdot 1 \quad N_1 = N_0 + 1 \quad \} = \text{« nombre positif »} \quad \text{Df}$$

$$\cdot 2 \quad N_1 \supset N_0 \quad [ = P4.2 ]$$

$$\cdot 3 \quad N_0 = i0 \cup N_1$$

$$[ 0 \in i0 \cup N_1 : x \in N_0, \Rightarrow x+1 \in N_1 : \text{Induct} \Rightarrow N_0 \supset i0 \cup N_1 \quad (1)$$

$$P4.1, P8.2 \Rightarrow i0 \cup N_1 \supset N_0 \quad (2) \quad (1), (2) \Rightarrow P ]$$

$$\cdot 4 \quad a \in N_0, \Rightarrow a+1 = 0 \quad \text{Pp}$$

$$\cdot 5 \quad 0 \in N_1 \quad [ = P \cdot 4 ]$$

$$\cdot 6 \quad N_1 = N_0 + 0 \quad \text{Dfp} \quad [ P \cdot 3, P \cdot 5, \S \wedge 5.2 \Rightarrow P ]$$

$$\cdot 7 \quad 0 = n(N_0 - N_1) \quad \text{Dfp}$$

$$\cdot 4. \quad \text{« Le nombre qui suit un nombre quelconque n'est jamais 0. »}$$

Un système périodique, p. ex. les heures astronomiques du jour, où l'heure qui suit 23 est 0, ne satisfait pas à la 4, bien qu'il satisfasse à toutes les autres Pp.

Ainsi nous avons prouvé l'indépendance ordonnée des Pp; c'est-à-dire que non seulement on ne sait pas déduire, mais qu'il est impossible de déduire une Pp des précédentes.

On peut prouver aussi l'indépendance absolue des Pp. Les exemples portés à propos des P1·3, 6·2, 8·4 prouvent qu'elles sont indépendantes aussi des Pp suivantes. Ils ont été publiés dans RdM. a.1891 p.91.

Si en attribuant à 0 et à + la signification commune, l'on donne à  $N_0$  la signification  $N_1$ , sont vérifiées toutes les Pp. exceptée la 4·1.

Si en conservant à 0 et à + la signification commune, on attribue à  $N_0$  la signification « chiffre, ou ensemble des nombres 0, 1, 2, ..., 9 », on satisfait à toutes les conditions, à l'exception de la 4·2.

Ces exemples sont dûs à M. Padoa; voir F1899.

Enfin nions que  $N_0$  soit une Cls; c'est-à-dire par Cls entendons tout ensemble, excepté l'ensemble  $N_0$ ; mais convenons que  $a \varepsilon N_0$  signifie «  $a$  est un nombre » (comme si  $N_0$  était une Cls). Alors seront vérifiées toutes les P suivantes, mais non la ·0. Cet exemple a été indiqué par M. Varca.

Ces Pp, dont nous avons vu la nécessité, sont suffisantes pour déduire toutes les propriétés des nombres qu'on rencontrera dans la suite. Mais il y a une infinité de systèmes qui satisfont à toutes ces Pp. P. ex. elles sont toutes vérifiées si l'on remplace  $N_0$  et 0 par  $N_1$  et 1. Tous les systèmes qui satisfont aux Pp sont en correspondance réciproque avec les nombres. Le nombre,  $N_0$ , est ce qu'on obtient par abstraction de tous ces systèmes; autrement dit, le nombre,  $N_0$ , est le système qui a toutes les propriétés énoncées par les P primitives, et celles-là seulement.

·7. Cette P, due à Padoa F1899, exprime 0 par  $N_0$  et  $N_1 = N_0 +$ ; elle permet de réduire le nombre des idées primitives. Mais alors il faut changer le système des Pp: cette transformation a été faite par M. Padoa dans ses conférences sur l'*Algebra e la Geometria, quali teorie deduttive*, Roma 1900.

On pourrait même définir le système  $(0, N_0, +)$  comme le système satisfaisant aux Pp.

·1	$\ast$	$0 \cdot 1$	$+ \varepsilon N_0 \cdot 1 N_0$	[ = P4·2 ]
·2			$+ \varepsilon (N_0 \cdot 1 N_0) \text{sim}$	[ = P6·3 ]
·3		$s \varepsilon \text{Cls} \cdot 0 \varepsilon s \cdot + \varepsilon s \cdot s \cdot \supset \cdot N_0 \supset s$		[ = P4·3 ]
·4		$b \varepsilon N_0 \cdot \supset \cdot + b \varepsilon N_0 \cdot 1 N_0$		[ = ·1 ]
·5		$\ast$	$+ b \varepsilon (N_0 \cdot 1 N_0) \text{sim}$	[ = P6·4 ]

\* 10.  $s \in \text{Cls} \text{ , } u \in \text{sfs} \text{ , } a \in s \text{ , } b, c \in N_0 \text{ , } \supset$ .

\*1  $au0 = a$  Df \*2  $au(b+) = (aub)u$  Df

\*3  $aub \in s$

[ Hp.  $b=0$  , P.1  $\supset$  , Ths : Hp.  $aub \in s$  , P.2  $\supset$  ,  $au(b+) \in s$  : Induct.  $\supset$  , P ]

\*4  $(ub) \in \text{sfs}$  [ = P.3 ]

\*5  $u \in \text{sfs Sim} \supset (ub) \in \text{sfs Sim}$

[ Hp.  $b=0$   $\supset$  , Ths (1)

Hp.  $ub \in \text{sfs Sim} \text{ , } x, y \in s \text{ , } x = y \supset xub = yub \text{ ,}$

$\supset xaub = yaub \supset xau(b+) = yau(b+)$  (2)

Hp.  $ub \in \text{sfs Sim} \text{ , } 2 \supset u(b+) \in \text{sfs Sim}$  (3)

(1 & 3) , Induct.  $\supset$  , P ]

\*6  $r \in \text{sfs} \text{ , } x \in s \text{ , } \supset x, xur = xru \supset (aub)r = (ar)ub$

[ Hp.  $b=0$  , P.1  $\supset$  , Ths (1)

Hp.  $(aub)r = (ar)ub \text{ , } P.2 \supset [au(b+)]r = [aubu]r =$

$[arub]u = (arub+)$  (2)

(1 & 2) , Induct.  $\supset$  , P ]

\*61 Hp P.6  $\supset (aub)rc = (arc)ub$  [ Hp.  $(ub, r, c \vdash r, a, b)$  P.6  $\supset$  , Ths ]

\*62 Hp P.6  $\supset a[(ur)b] = a(ub)(rb)$

[ Hp.  $b=0$   $\supset$  , Ths (1)

Hp.  $a[(ur)b] = a(ub)(rb) \supset a[(ur)(b+)] = a[(ur)b]ur =$

$a(ub)(rb)ur = a(ub)(rb)c = a[a(b+)](r(b+))$  (2)

(1 & 2) , Induct.  $\supset$  , P ]

\*7  $a(ub)(uc) = a(uc)(ub)$  [P.61 ,  $r=u$   $\supset$  , P]

\*8  $(aub)(uc) = au(b+c)$

[ Hp.  $c=0$  , P.1  $\supset$  , Ths (1)

Hp.  $(aub)(uc) = au(b+c) \supset [(aub)(uc)]u = [au(b+c)]u$  (2)

$\supset (aub)(uc+c) = au(b+c+)$  (3)

Hp. (1 & 3) , Induct.  $\supset$  , Ths ]

Ex. des P. précédentes : P11, § < P2, §\P1-9.

\*9  $r \in \text{sfs} \text{ , } \supset r^b a = a[(\hat{x} r, c)b]$  Df

P.1 — Soit  $s$  une classe,  $u$  une transformation des  $s$  en  $s$ ; soit  $a$  un  $s$ , et  $b$  un nombre; alors par  $au0$  on indique  $a$  ; (P.2) et par  $au(b+)$  nous entendons ce qu'on obtient en opérant sur  $aub$  encore une fois par le signe  $u$  .

Si l'on fait, dans la P.2,  $b=0$ , on obtient  $au1=au$ ; en faisant  $b=1$  on a  $au2 = (au)u$ ,  $au3 = auu$ ,... est ainsi de suite. En conséquence, par induction, on obtient la signification de  $aub$ , quel que soit le nombre  $b$  (P.3).

La formule  $aub$  doit être décomposée, lorsqu'il est nécessaire, en  $a(ub)$ . Soit donc  $u$  une opération définie dans la classe  $s$ ; quel que soit le nombre  $b$  on obtient la nouvelle opération  $ub$  (P.4), qu'on appelle « l'opération  $u$  répétée (itérée)  $b$  fois ».

On déduit: (P.5) « Toute fonction semblable répétée est aussi semblable ».

(P.6) « Si l'opération  $u$  est commutable avec l'opération  $v$ , l'opération  $ub$  est aussi commutable avec  $v$ , et (P.61) l'opération  $ub$  est commutable avec  $vc$ , quels que soient les nombres  $b$  et  $c$  ».

(P.62) « Si les opérations  $u$  et  $v$  sont commutables entre elles dans la classe  $s$ , alors l'opération  $uv$  répétée  $b$  fois est, dans la classe  $s$ , identique à l'opération  $(ub)(vb)$  ».

Quelques Auteurs appellent « puissance » d'une opération l'opération répétée. (P.7) « Deux puissances d'une même opération sont commutables entre elles ».

(P.9) Si un signe de fonction  $v$ , au lieu de suivre la variable, la précède, la fonction répétée  $b$  fois est indiquée ordinairement par  $v^b$ , notation que nous suivrons. Dans ce cas  $([v](vx))$  est le signe de fonction qui, en suivant la variable  $a$ , donne pour résultat  $va$ .

Ex.: §1 P84.4.2 §D P6.4 §e P3.1 §Subst P2.5.

On rencontre les puissances des fonctions dans Babbage, London T. a.1815 p.390.

\* 11.  $(N_0, +)[(s, u) \text{ P10.1 } \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 8 \cdot \supset]$   
 $\text{P3.1 } \cdot 2 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 9 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 3$

Des P10 par une substitution on déduit les P sur la somme.

On peut continuer la lecture en passant au §> qui suit, ou au §−, ou au §×, ou au §... Σ, car chacun de ces signes est défini par le signe +.



§21  $\mathbb{S} >$ 

+ \* 1.  $a, b, c, d \in N_0, \supset$ :

$$\cdot 0 \quad b \mathbb{S} a \text{ .i.e. , } a \leq b \text{ .i.e. , } b \in a + N_6 \quad \text{Df} \mathbb{S}$$

Les signes  $>$  et  $<$  ont la forme ff' et § dans Girard, a.1629 fol.18; la forme  $\sqsupset \sqsubset$  dans Oughtred a.1631, qui a aussi introduit des signes correspondants à  $\mathbb{S} \leq$  (Clavis Math. Londini a.1638 p.166); et la forme actuelle dans Harriot a.1631 p.10.

Nous considérons ici le signe  $\mathbb{S}$  comme un signe simple. Voir P2.4.

$$\cdot 01 \quad a \mathbb{S} 0 \quad \cdot 02 \quad a \mathbb{S} a \quad \cdot 03 \quad a \mathbb{S} b, b \mathbb{S} a \text{ .i.e. , } a = b$$

$$\cdot 04 \quad a \mathbb{S} b \mathbb{S} c \text{ .i.e. , } a \mathbb{S} b, b \mathbb{S} c \quad \text{Df}$$

$$\cdot 1 \quad c \mathbb{S} b, b \mathbb{S} a \text{ .i.e. , } c \mathbb{S} a$$

$$[ x, y \in N_0, c = b + y, b = a + x, \supset, c = a + x + y = a + (x + y) \text{ .i.e. , } c \mathbb{S} a \quad (1) \\ (1), \text{Elim. } x, y, \supset, P ]$$

$$\cdot 2 \quad b \mathbb{S} a \text{ .i.e. , } b + c \mathbb{S} a + c$$

$$[ x \in N_0, b = a + x, \supset, b + c = a + x + c = a + c + x, \supset, b + c \mathbb{S} a + c \quad (1)$$

$$x \in N_0, b + c = a + c + x, \S + P6.4, \supset, b = a + x, \supset, b \mathbb{S} a \quad (2)$$

$$(1), (2), \text{Elim. } x, \supset, P ]$$

$$\cdot 3 \quad b \mathbb{S} a, d \mathbb{S} c \text{ .i.e. , } b + d \mathbb{S} a + c$$

$$[ \text{Hp.}, P.2, \supset, b + d \mathbb{S} a + d, a + d \mathbb{S} a + c, P.1, \supset, \text{Ths.} ]$$

\* 2.  $a, b, c, d \in N_0, \supset$ :

$$\cdot 0 \quad b > a \text{ .i.e. , } a < b \text{ .i.e. , } b \in a + N_1 \quad \text{Df} >$$

$$\cdot 1-3 = (> \mid \mathbb{S}) P1.1-3$$

$$\cdot 4 \quad b \geq a \text{ .i.e. , } b > a \vee b = a \quad \text{Dfp}$$

$$[ \text{Df} \leq, \S + P8.3, \text{Df} <, \supset: b \mathbb{S} a \text{ .i.e. , } b \in a + N_0 \text{ .i.e. , } b \in a + (0 \cup N_1) \text{ .i.e. , } \\ b \in a \cup a + N_1 \text{ .i.e. , } b \geq a \vee b \in a + N_1 \text{ .i.e. , } b = a \vee b > a ]$$

$$\cdot 5 \quad a = b \vee a < b \vee a > b$$

$$[ a \in N_0, b = 0, P1.01, \supset, P \quad (1)$$

$$a, b \in N_0, a = b, \supset, a < b + 1 \quad (2)$$

$$a, b \in N_0, a < b, \supset, \quad (3)$$

$$a, c \in N_1, a = b + c, \supset, a \mathbb{S} b + 1 \quad (4)$$

$$a > b, \cdot 4, \supset, a \mathbb{S} b + 1 \quad (5)$$

$$a = b \cup a < b \cup a > b, \cdot 2, 3, 5, \supset, \\ a < b + 1 \cup a = b + 1 \cup a > b + 1 \quad (6)$$

$$(1), (6), \text{Induct.}, \supset, P ]$$

$$\cdot 6 \quad \neg(a > a) \quad \cdot 7 \quad b > a \text{ .i.e. , } \neg(b \leq a) \quad \text{Dfp}$$

Les Df de max et min contiennent les seuls signes précédents.

## §22 —

- $+$  \* 1.  $a \varepsilon N_0 . b \varepsilon a + N_0 . \supset :$   
 ·0  $b - a = \iota [N_0 \wedge x \exists (x + a = b)]$  Df  
 ·1  $b - a \varepsilon N_0$  ·2  $(b - a) + a = b$   
 $[ \text{Hp} . \supset . \nexists N_0 \wedge x \exists (b = x + a)$  (1)  
 $\text{Hp} . x, y \varepsilon N_0 . b = x + a . b = y + a . \S + \text{P}6.4 . \supset . x = y$  (2)  
 $(1) . (2) . \S \text{P}1 . \supset . b - a \varepsilon N_0 \wedge x \exists (x + a = b) . \supset . \text{Ths} ]$   
 ·3  $-a \varepsilon (a + N_0) \cap N_0$  [= P.1]  
 ·4  $a - 0 = a$  ·41  $a - a = 0$   
 \* 2.1  $s \varepsilon \text{Cls}' N_0 . \supset . +s = +^s . -s = -^s$  Df  
 ·2  $a, b \varepsilon N_0 . \supset . a + (+b) = a + b$  Df  
 ·3  $b \varepsilon N_0 . a \varepsilon b + N_0 . \supset . a + (-b) = a - b$  Df  
 ·4  $a \varepsilon N_0 . \supset . a = +a$  Df

*Note sur les nombres positifs et négatifs.*

Les hiéroglyphes adoptés par Ahmès, a.—2000 pour représenter les signes  $+$  et  $-$  sont les jambes d'un homme qui va, ou qui vient (table XI N.28).

Le signe  $+$  dans Diophante est sous-entendu. Le signe  $-$  a la forme  $\Delta$ .

Ces signes ont la forme  $\rho$  et  $m$ , abréviations des mots « plus » et « minus » dans Chuquet a.1484 et dans Pacioli a. 1494; et la forme actuelle, qu'on croit une déformation de la précédente, chez Grammateus a.1521; voir M. Cantor t.2 p.39.

(Dans Widmann a.1489 le signe  $+$  a une signification différente).

P1.0 « Soit  $a$  un nombre, et  $b$  un nombre supérieur ou égal à  $a$ . On indique par  $b - a$  le nombre  $x$  qui satisfait à l'équation  $x + a = b$  ».

$N_0 \wedge x \exists (x + a = b)$  est une classe; en écrivant en avant de cette classe le signe  $\iota$  on obtient l'individu qui la constitue.

P.1. « Dans les Hp. énoncées,  $b - a$  est un nombre déterminé ».

P.3. « Soit  $a$  un nombre; alors  $-a$  est une opération qui, appliquée à un nombre non inférieur à  $a$  produit un nombre ».

Elle n'est qu'une forme différente de la P.1. On peut la comparer à la  $\S + \text{P}9.4$ , laquelle dit que  $+a$ , c'est à dire l'opération  $+$  répétée  $a$  fois, est un  $N_0 \cap N_0$ .

Les signes  $+a$   $-a$   $+N_0$   $-N_0$  correspondent, à peu près, aux mots

« ajouter  $a$  » « retrancher  $a$  » « nombre positif » « nombre négatif »;  
ils représentent des opérations  $\mathbf{f}$ .

Cette façon de considérer les nombres positifs et les négatifs se rencontre plus ou moins clairement dans plusieurs A.:

MacLaurin a.1718 p.6:

« a Quantity that is to be added is called a Positive Quantity; and a Quantity to be subtracted is said to be Negative. »

Cauchy, a.1821, p.333:

« ... on acquiert l'idée de quantité (positive ou négative) lorsque l'on considère chaque grandeur d'une espèce donnée comme devant servir à l'accroissement ou à la diminution d'une autre grandeur fixe de même espèce. Pour indiquer cette destination, on représente les grandeurs qui doivent servir d'accroissements par des nombres précédés du signe +, et les grandeurs qui doivent servir de diminutions par des nombres précédés du signe —.... Enfin, l'on est convenu de ranger les nombres absolus qui ne sont précédés d'aucun signe dans la classe des quantités positives. »

La Df P2.1 donne aux signes  $+N_0$  et  $-N_0$  les valeurs « plus quelque  $N_0$  » et « moins quelque  $N_0$  ».

Une lettre isolée peut indiquer un nombre positif ou un nombre négatif.

Si l'on pose  $a=2$ ,  $b=+5$ , on aura, sans convention nouvelle,  $ab=2+5$ ; la P2.2 dit que nous convenons, selon l'usage commun, de représenter par  $a+b$  cette somme. De même pour la P3.

La P2.4 exprime la convention de représenter par le même signe deux objets différents, un nombre absolu et un nombre positif. On pourrait évidemment supprimer ces définitions 2.4; mais on aura des formules différentes des ordinaires.

n

$N_0 + - * 3.0 \text{ n} = +N_0 \vee -N_0$  Df

1.  $N_0 \supset \text{n}$  [P.0, P2.4,  $\supset$ , P]

« n », qu'on lit « nombre relatif, ou qualifié », indique l'ensemble des nombres positifs et des négatifs.

2.  $x, y \in \text{n} \supset :$

$x=y := u \in N_0 . u+x, u+y \in N_0 \supset u . u+x = u+y$  Df

« Deux nombres relatifs  $x$  et  $y$  sont égaux, par définition, lorsque pour tout nombre positif  $u$ , on a  $u+x = u+y$ , pourvu que ces opérations soient possibles en nombres positifs ».

3.  $a, b \in N_0 \supset : +a = +b := -a = -b := a=b$  ;  
 $+a = -b := a=0 . b=0$

\* 4.0  $x, y \in \text{n} \supset$

$x+y = \text{n} \wedge \exists z [u \in N_0 . u+x, u+x+y \in N_0 \supset u . u+x+y = u+z]$  Df

« On appelle somme  $x+y$  de deux n, un nombre relatif  $z$  tel que, en effectuant sur un nombre positif  $u$  l'opération  $+$ , puis l'opération  $+$ , pourvu qu'elles soient possibles, on obtienne pour dernier résultat  $u+z$ . »

\*01  $a, b \in \mathbb{N}_0 \rightarrow$

$$+a+b = +(a+b) \quad -a-b = -(a+b) \quad +a-b = +(a-b) = \\ -(b-a) \quad -a+b = -(a-b) = +(b-a)$$

{ BRAHMAGUPTA, Version de Rodet, *Journal Asiatique*, a.1878 p.24:

« § 19. La somme de deux biens est un bien; celle de deux dettes une dette; d'un bien et d'une dette, leur différence, ou, si elles sont égales, zéro. La somme de zéro et d'une dette est une dette; d'un bien et de zéro est un bien; de deux zéros est zéro.

§ 20-21. Règle pour la soustraction....

Dette retranchée de zéro devient un bien, et bien devient une dette. ...

Si l'on doit retrancher un bien d'une dette ou une dette d'un bien, on en fait la somme. »{

$a, b, c \in \mathbb{N} \rightarrow$

\*1  $a+b \in \mathbb{N}$

$$*2 \quad a+b = b+a \quad *3 \quad a+(b+c) = (a+b)+c = a+b+c$$

$$*4 \quad a+c = b+c \Rightarrow a=b \quad *5 \quad a+0 = a$$

\* 5\*0  $x \in \mathbb{N} \rightarrow -x = 1 \wedge \forall y (x+y=0)$

Df

\*01  $a \in \mathbb{N}_0 \rightarrow -(+a) = -a \quad -(-a) = +a$

$a, b \in \mathbb{N} \rightarrow$  \*1  $-a \in \mathbb{N}$  \*2  $-(-a) = a$  \*3  $-(a+b) = -a-b$

$$*4 \quad a-b = a+(-b) \quad \text{Df}$$

$$*5 \quad a=b \Rightarrow -a=-b \Rightarrow a-b=0$$

$$*6 \quad x \in \mathbb{N} \rightarrow a+x=b \Rightarrow x=b-a$$

$$*7 \quad a+b=0 \rightarrow a-b=0 \Rightarrow a=0 \rightarrow b=0$$

\* 6\*0  $u, v \in \text{Cls'n} \rightarrow a \in \mathbb{N} \rightarrow \S + P7 \rightarrow \S - P2*1$

$$*1 \quad a+n = n \rightarrow n+n = n \rightarrow -n = n$$

$$*2 \quad n = N_0 - N_0 = N_1 - N_1 = n - n$$

> \* 7\*0  $x, y \in \mathbb{N} \rightarrow x > y \Rightarrow y < x \Rightarrow x \in y + \mathbb{N}_1$  Df

\*01  $a, b \in \mathbb{N}_1 \rightarrow +a > +b \Rightarrow a > b : +a > -b : -a > -b \Rightarrow a < b$

$a, b, c, d \in \mathbb{N} \rightarrow$  \*1-6  $\Rightarrow P2*1-7$

$$*7 \quad a > b \Rightarrow x \in \mathbb{N}_0 \rightarrow x+a, x+b \in \mathbb{N}_0 \rightarrow x \rightarrow x+a > x+b \quad \text{Dfp}$$

$$*8 \quad a > b \Rightarrow -a < -b \Rightarrow a-b > 0$$

$$*9 \quad a > b, c < d \rightarrow a-c > b-d : a < b, c > d \rightarrow a-c < b-d$$

Les Df de « mod » et de « sign » sont exprimées par les seuls signes précédents.

§23 ×

$$+ \quad * \quad 1. \quad a, b, c, d \in N_0 \quad \left. \begin{array}{l} \cdot 0 \quad a \times 0 = 0 \\ \cdot 01 \quad a \times (b+1) = (a \times b) + a \end{array} \right\} \text{Df} \times$$

$$\cdot 02 \quad \begin{array}{l} ab = a \times b \quad , \quad a \times b \times c = a \times (b \times c) \quad , \\ a \times (b+c) = a \times b + a \times c \quad , \quad a + (b \times c) = a + (b \times c) \end{array} \quad \text{Df}$$

On rencontre le signe  $\times$  dans Oughtred, *Clavis mathematica*, a.1631.  
Les P·0·01 sont des Df par induction. On peut les remplacer par P·2·0, ou par §ΣP3·4.

$$\cdot 1 \quad \begin{array}{l} a \times b \in N_0 \\ [ \quad a \in N_0, \text{Df} \times \quad \cdot 0, \quad a \times 0 \in N_0 \quad \quad \quad 1 \\ \quad a, b \in N_0, \quad a \times b \in N_0, \quad \text{Df} \times, \quad \S + \text{P5} \cdot 1 \quad \cdot 0, \quad a \times (b+1) \in N_0 \quad \quad \quad 2 \\ \quad \cdot 1, \quad \cdot 2 \quad , \text{Induct} \quad \cdot 0, \quad \text{P} \quad ] \end{array}$$

$$\cdot 2 \quad \begin{array}{l} 0 \times a = 0 \\ [ \quad \text{Df} \times \quad \cdot 0, \quad 0 \times 0 = 0 \quad \quad \quad \cdot 1 \\ \quad a \in N_0, \quad 0 \times a = 0, \quad \text{Df} \times \quad \cdot 0, \quad 0 \times (a+1) = 0, \quad a+0 = 0 \quad \quad \quad \cdot 2 \\ \quad \cdot 1, \quad \cdot 2 \quad , \text{Induct} \quad \cdot 0, \quad \text{P} \quad ] \end{array}$$

$$\cdot 21 \quad \begin{array}{l} 1 \times a = a \\ [ \quad \text{Df} \times \quad \cdot 0, \quad 1 \times 0 = 0 \quad \quad \quad \cdot 1 \\ \quad a \in N_0, \quad 1 \times a = a \quad \cdot 0, \quad 1 \times (a+1) = 1 \times a + 1 = a+1 \quad \quad \quad \cdot 2 \\ \quad \cdot 1 \quad , \quad \cdot 2 \quad , \text{Induct} \quad \cdot 0, \quad \text{P} \quad ] \end{array}$$

$$\cdot 3 \quad \begin{array}{l} a(b+c) = ab+ac \quad \quad \quad \} \text{Distrib}(\times, +) \{ \\ [ \quad a, b, c \in N_0, \quad c=0 \quad \cdot 0, \quad a(b+c) = ab+ac \quad \quad \quad \cdot 1 \\ \quad a, b, c \in N_0, \quad a(b+1) = ab+ac, \quad \text{Assoc} +, \quad \text{Df} \times \quad \cdot 0, \quad a(b+c+1) = \\ \quad a[b+c+1] = a(b+c)+a = ab+ac+a = ab+a+c+1 \quad \quad \quad \cdot 2 \\ \quad \cdot 1 \quad , \quad \cdot 2 \quad , \text{Induct} \quad \cdot 0, \quad \text{P} \quad ] \end{array}$$

$$\cdot 31 \quad \begin{array}{l} (a+b)c = ac+bc \quad \quad \quad \} \text{EUCLIDES VII P5} \{ \\ [ \quad \text{Hp} \quad , \quad c=0 \quad \cdot 0, \quad \text{Ths} \quad \quad \quad \cdot 1 \\ \quad a, b, c \in N_0, \quad (a+b)c = ac+bc, \quad \text{Df} \times \quad \cdot 0, \quad (a+b)(c+1) = a(b+c)+a(b+c) + \\ \quad ac+bc+a+b = ac+a+bc+b = a(c+1)+b(c+1) \quad \quad \quad \cdot 2 \\ \quad \cdot 1 \quad , \quad \cdot 2 \quad , \text{Induct} \quad \cdot 0, \quad \text{P} \quad ] \end{array}$$

$$\cdot 32 \quad (a+b)(c+d) = ab+ad+bc+bd \quad \quad \quad [ \text{P} \cdot 3 \quad , \quad \text{P} \cdot 31 \quad \cdot 0, \quad \text{P} ]$$

$$\cdot 4 \quad \begin{array}{l} ab = ba \quad \quad \quad \} \text{Comm} \times \{ \\ \{ \text{EUCLIDES VII P16: } \text{Ἐστωσαν δύο ἀριθμοὶ οἱ } A, B, \\ \text{καὶ ὁ μὲν } A \text{ τὸν } B \text{ πολλαπλασιάσας τὸν } \Gamma \text{ ποιεῖτω,} \\ \text{ὁ δὲ } B \text{ τὸν } A \text{ } \quad \quad \quad \} \\ \text{λέγων, ὅτι ἴσος ἐστὶν ὁ } \Gamma \text{ τῷ } A. \} \end{array}$$

$$[ a \in N_0, P \cdot 0 \cdot 2 \cdot \supset, a \times 0 = 0 \times a \quad (1)$$

$$a, b \in N_0, ab = ba, \text{Df} \times \cdot \supset, a(b+1) = ab+a = ba+a$$

$$P \cdot 21, P \cdot 31 \cdot \supset, \quad \text{»} \quad = ba+1a = (b+1)a \quad (2)$$

$$(1), (2), \text{Induct} \cdot \supset, P \cdot ]$$

$$\cdot 3 \quad (a \times b) \times c = a \times (b \times c) \quad \{ \text{Assoc} \times \}$$

$$[ \text{Hp} \cdot c=0 \cdot \supset, \text{Ths} \quad (1)$$

$$a, b, c \in N_0, (ab)c = a(bc), \text{Df} \times \cdot \text{Distrib}(\times, +) \cdot \supset,$$

$$(ab)(c+1) = (ab)c+ab = a(bc)+ab = a(bc+b) = a[b(c+1)] \quad (2)$$

$$(1), (2), \text{Induct} \cdot \supset, P \cdot ]$$

$$\cdot 6 \quad ab=0 \cdot \Rightarrow, a=0 \cdot \vee, b=0 \quad \cdot 7 \quad ac=bc, c \neq 0 \cdot \supset, a=b$$

$$J + * \quad 2 \cdot 0 \quad a, b \in N_0 \cdot \supset, a \times b = 0[(+a)b] \quad \text{Dfp} \quad [= P1 \cdot 0 \cdot 01]$$

«  $a \times b$  est ce qu'on obtient en effectuant sur 0 l'opération  $+a$ ,  $b$  fois ».

$$\cdot 1 \quad (N_0, +a, 0) \vdash (s, u, a) \S + P10 \cdot 3 \cdot \supset, P1 \cdot 1$$

$$\cdot 2 \quad (N_0, +a, 0) \vdash (s, u, a) \S + P10 \cdot 8 \cdot \supset, P1 \cdot 3$$

$$\cdot 3 \quad (N_0, +a, +b, 0, c) \vdash (s, u, r, a, b) \S + P10 \cdot 62 \cdot \supset, P1 \cdot 31$$

$$\cdot 4 \quad s \in \text{Cls}, u \in \text{sjs}, x \in s \cdot \supset, x[(ua)b] = x[u(a \times b)]$$

$$[ \text{Hp} \cdot b=0 \cdot \supset, \text{Ths} \quad (1)$$

$$\text{Hp} \cdot x[(ua)b] = x[u(a \times b)] \cdot \supset, x[(ua)(b+1)] = x[(ua)b]ua =$$

$$[u(a \times b)]ua = xu(a \times b+a) = xu[a \times (b+1)] \quad (2)$$

$$(1), (2), \text{Induct} \cdot \supset, P \cdot ]$$

$$\cdot 5 \quad (N_0, +a, 0) \vdash (s, u, x) P \cdot 4 \cdot \supset, P1 \cdot 5$$

$$* \quad 3. \quad u, r, w \in \text{Cls}, N_0, a, b \in N_0 \cdot \supset:$$

$$\cdot 0 \quad u \times a = u'(\times a), (a \times r) = (a \times r', u \times r = (a \times r') \S + P7 \cdot 3 \quad \text{Df}$$

$$\cdot 01 \quad au = ua = (ua)u, ur = ru, u(rw) = (ur)w = urw$$

$$\cdot 02 \quad u(a+b) \supset ua+ub, a(u+r) = au+ar, u(r+w) \supset ur+uw$$

$$\cdot 03 \quad N_0 \times N_0 = N_0, N_1 \times N_1 = N_1$$

$$a, b, r \in N_0 \cdot \supset: \quad \cdot 1 \quad b \in N_0 \times a, c \in N_0 \times b \cdot \supset, c \in N_0 \times a$$

$$\cdot 11 \quad b \in N_0 \times a \cdot \supset, N_0 \times b \supset N_0 \times a$$

$$\cdot 2 \quad b, c \in N_0 \times a \cdot \supset, b+c \in N_0 \times a$$

$$\cdot 21 \quad N_0 \times a + N_0 \times a = N_0 \times a$$

$$\cdot 3 \quad b, b+c \in N_0 \times a \cdot \supset, c \in N_0 \times a$$

$$\{ \cdot 2 \cdot 3 \text{ EUCLIDES VII P28 } \}$$

$$\cdot 31 \quad b \in N_0 \times a \cdot \supset, bc \in N_0 \times ac$$

$$\cdot 32 \quad m, n \in N_0 \times c \cdot \supset, am+bn \in N_0 \times c$$

$$\cdot 4 \quad a+b \in 2N_0 \cdot \Rightarrow, a, b \in 2N_0 \cdot \vee, a, b \in 2N_0+1$$

$$\cdot 5 \quad a(a+1) \in 2N_0, a(a+1)(a+2) \in 6N_0 \quad \text{Continuation : } \S! P \cdot 2$$

$$\cdot 6 \quad a(a+1)(2a+1) \in 6N_0$$

> \* 4.  $a, b, c, d \in N_1 \supset$ .

$$\cdot 1 \quad a > b \equiv ac > bc \quad \cdot 2 \quad a > b, c > d \supset ac > bd$$

$$\cdot 3 \quad a > b, c > d \supset ac + bd > ad + bc$$

— \* 5.

$$\cdot 1 \quad b, c \in N_0, a \in b + N_0 \supset (a - b)c = ac - bc \quad \{ \text{EUCLIDES VII P7} \}$$

$$\{ \text{Df-}, \text{Distrib}(\times, +) \supset ac = [(a - b) + b]c = (a - b)c + bc \supset P \}$$

$$\cdot 2 \quad b, d \in N_0, a \in b + N_0, c \in d + N_0 \supset (a - b)(c - d) = ac + bd - bc - ad$$

n \* 6.

$$\cdot 0 \quad a \in n, b \in N_0 \supset a \times b = 0[(+a)b], a \times (-b) = 0[(-a)b] \quad \text{Df}$$

$$\cdot 01 \quad a, b \in N_0 \supset (+a) \times (+b) = +(a \times b), (-a) \times (+b) = -(a \times b),$$

$$(+a) \times (-b) = -(a \times b), (-a) \times (-b) = +(a \times b)$$

\} DIOPHANTUS I 9: « *Ἀεὶ ὅταν ἐπὶ λείψαν πολλὰ πλάσσωσι θείῃσιν ποιεῖ ἔπαυξιν. Ἀεὶ ὅταν δὲ ἐπὶ ἑπαυξίν, ποιεῖ λείψαν.* » \}

\* 7.  $a, b, c \in n \supset$ .  $\cdot 1 \quad a \times b \in n$

$$\cdot 2 \quad 0 \times a = 0, 1 \times a = a \quad \cdot 3 \quad a(b + c) = ab + ac \quad \cdot 4 \quad ab = ba$$

$$\cdot 5 \quad a(bc) = (ab)c = abc \quad \cdot 6, 7 = \text{P1} \cdot 6, 7$$

\* 8.  $a, b, c, d \in n \supset$ .

$$\cdot 1 \quad a(b - c) + b(c - a) + c(a - b) = 0$$

$$\cdot 2 \quad (a - b)(c - d) + (b - c)(a - d) + (c - a)(b - d) = 0$$

$$\cdot 3 \quad (a + b)(b + c)(c - a) + (b + c)(c + a)(a - b) + (c + a)(a + b)(b - c) = (a - b)(b - c)(c - a)$$

$$\cdot 4 \quad (a - b)(b + c - a)(a - b + c) + (b - c)(a - b + c)(a + b - c) + (c - a)(a + b - c)(b + c - a) = 4(a - b)(b - c)(c - a)$$

$$\cdot 5 \quad a(b + c)(b + c - a) + b(c + a)(c + a - b) + c(a + b)(a + b - c) = 6abc$$

$$\cdot 6 \quad a(b - c)(b + c - a) + b(c - a)(c + a - b) + c(a - b)(a + b - c) = 2(a - b)(b - c)(c - a)$$

\* 9.  $0 \cdot 6 = (n \mid N_0) P3$

\* 10.  $a, b \in n, c \in N_1 \supset a > b \equiv ac > bc$

Par les signes précédents sont exprimées les Df de /,  $\vdash$ ,  $N_p$ .

## §24 / R r

$\times$	$\ast$	1. $a \in N_1, b \in N_1 \times a \supset$	
·0		$b/a = 1 N_1 \wedge \exists x(x \times a = b)$	Df
·1		$b/a \in N_1$	·2 $(b/a) \times a = b$
·3		$\neg a \in (a \times N_1) \nexists N_1$	
·4		$a/a = 1$	·41 $a/a = 1$
$\ast$		2·1 $s \in \text{Cls } N_1 \supset \neg s = \neg s$	Df
2		$a, b \in N_1 \supset b/a = (\times b)(/a)$	Df

P1·0. « Soit  $a$  un nombre (non nul), et  $b$  un multiple de  $a$ . «  $b$  divisé par  $a$  » désigne le nombre  $x$  qui satisfait à la condition  $x \times a = b$  ».

P·3. « Donc  $/a$ , qu'on lit « diviser par  $a$  », indique une opération définie sur les multiples de  $a$ ; le résultat est un  $N_1$  ».

On dérive toutes ces propositions de §—P1, si l'on remplace les signes  $N_0, +, -, 0$  par  $N_1, \cdot, /, 1$ .

La notation  $b/a$ , répandue notamment chez les auteurs anglais, est une transformation très commode de la notation commune  $\frac{b}{a}$ , due aux Hindous, et qu'on rencontre dans Leonardo Fibonacci, a. 1202, *Liber Abaci*, fol. 11. Le signe de division a aussi les formes :

$a/b$  dans Oughtred a. 1667 p. 196, où « quantitas intra curvam denominator est »,  $b \div a$  (Pell, MacLaurin, ...),  $b:a$  (Leibniz), etc.

P2·2. « On écrit  $b/a$  au lieu de  $(\times b)(/a)$ , c'est-à-dire multiplier par  $b$  et ensuite diviser par  $a$ ;  $a$  et  $b$  sont des nombres donnés ».

Toute expression de la forme  $(\times b)(/a)$ , où  $a$  et  $b$  sont des  $N_1$ , s'appelle « raison » ou « nombre rationnel » ou « fraction ». Nous l'indiquerons par le symbole R.

Le nombre rationnel, ou raison, λόγος ὁρ ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμὸν ἕξει d'Euclide, se présente ici comme une opération, possible dans quelques cas, précisément comme nous avons rencontré les nombres positifs et négatifs.

Selon le langage ordinaire,  $\frac{b}{a}$  précède le nombre, ou la grandeur, sur laquelle on opère, et signifie « diviser par  $a$  et multiplier par  $b$  ». P. ex. «  $\frac{3}{5}$  de 15 fr. » signifie « ce qu'on obtient en divisant 15 fr. par 5 et en multipliant le résultat par 3 ». Mais nous préférons donner à  $b/a$ , qui suit le nombre sur lequel on opère, la signification « multiplier par  $b$  et diviser par  $a$  », afin de rendre possible l'opération dans un plus grand nombre de cas.



$\mathbb{R} = (\text{nombre rationnel})$

$N_1 \times / * 3.0 \quad \mathbb{R} = \{x/b \mid a, b \in N_1, x = (\times b)(/a)\} \quad \text{Df}$

1.  $\mathbb{R} = N_1 / N_1 \quad \text{Dfp} \quad [= P.0]$

2.  $N_1 \supset \mathbb{R}$

3.  $x, y \in \mathbb{R}, \supset: x = y :=: \exists u \in N_1, \exists x, \exists y \in N_1, \supset_u, ux = uy \quad \text{Df}$

« Deux nombres rationnels  $x$  et  $y$  sont dits égaux, lorsque, quel que soit le nombre  $u$ , tel que les opérations  $ux$  et  $uy$  soient possibles, les résultats sont égaux ». Cfr. §u P3.2. Quelques A. prennent comme Df la P1.1. Ils ne définissent pas la raison de deux  $N_1$ , mais seulement l'égalité de deux raisons. On introduit alors les nombres rationnels par abstraction.

\* 4.  $a, b, c, d, e, f \in N_1, \supset:$

1.  $a/b = c/d :=: ad = bc \quad \text{Dfp} \quad \{ \text{EUCLIDES VII P19} \}$

[ Hp.  $a/b = c/d, \supset, bd, (bd)(a/b), (bd)(c/d) \in N_1, P3.2, \supset,$

$(bd)(a/b) = (bd)(c/d), \supset, ad = bc \quad (1)$

Hp.  $ad = bc, x \in N_1, x(a/b), x(c/d) \in N_1, \supset, xad = xbc, \supset,$

$(xa/b)bd = (xc/d)bd, \S P1.51, \supset, xa/b = xc/d \quad (2)$

Hp.  $ad = bc, (2), \text{Export}, \supset, a/b = c/d \quad (3)$

$(1), (3), \supset, P ]$

2.  $a/b = (ac)/(bc) \quad \{ \text{EUCLIDES VII P17} \}$

3.  $a/b = c/b :=: a = c \quad 4. \quad a/b = a/d :=: b = d$

5.  $a/b = c/d :=: a/c = b/d :=: b/a = d/c \quad \{ \text{EUCL. VII P13} \}$

6.  $a/b = d/e, b/c = e/f, \supset, a/c = d/f \quad \{ \text{EUCLIDES V P22} \}$

7.  $a/b = e/f, b/c = d/e, \supset, a/c = d/f \quad \{ \text{EUCLIDES V P23} \}$

L'égalité  $a/b = c/d$  est dite une " proportion ". La 5 exprime les règles dites " inverser " et " alterner ".

\* 5.0  $x, y \in \mathbb{R}, \supset:$

$x \times y = xy :=: \exists z \in N_1, \exists x, \exists y \in N_1, \supset_u, ux = yz. \quad \text{Df}$

Le produit  $xy$  de deux nombres rationnels est le nombre rationnel  $z$  qui satisfait à la condition  $axy = uz$ , quel que soit le nombre entier  $u$ , pourvu que les opérations  $ux$  et  $axy$  soient possibles.

$a, b, c, d \in N_1, \supset:$

1.  $(a/b)(b/c) = a/c$

2.  $(a/b) \times (c/d) = (ac)/(bd) \quad \{ \text{EUCLIDES VIII P5} \}$

\* 6.  $a, b, c \in \mathbb{R} \rightarrow$

- 1  $a \times b \in \mathbb{R} \quad 2 \quad ab = ba \quad 3 \quad a(bc) = (ab)c = abc$
- 4  $ac = bc \implies a = b \quad 5 \quad (R \mid N_0) \S \times P2.0$
- 6  $a \times R = R \quad 7 \quad R \times R = R$
- 8  $\exists N_1 \wedge \exists m, n, p (ma, mb, mc \in N_1)$

\* 7.0  $x \in \mathbb{R} \rightarrow \frac{1}{x} \in \mathbb{R} \wedge yz(x \times y = 1) \quad \text{Df}$   
 $a, b \in N_1 \rightarrow \frac{1}{a/b} = b/a \quad 2 \quad (a/b)/(c/d) = (ad)/(bc)$

La P7.0 définit  $1/x$ , qui signifie « diviser par  $x$  », ou « multiplier par le réciproque de  $x$  », ou, en supprimant le signe de multiplication, « le réciproque de  $x$  ». Ce symbole est le correspondant de  $-x$ , qui signifie « retrancher  $x$  » « ajouter l'opposé de  $x$  » « le nombre négatif  $-x$  ».

Les calculs sur les fractions étaient connus des anciens Egyptiens, a. —2000. Voir F1899.

La considération de la fonction  $1/a$ , « le réciproque de  $a$  », c'est-à-dire la suppression du numérateur de la fraction, lorsqu'il est l'unité, qu'on remarque dans Ahmès, a été nouvellement proposée par M. Macfarlane (Educat. Times, a.1887).

\* 8.  $a, b \in \mathbb{R} \rightarrow$

- 1  $1/a \in \mathbb{R} \quad 2 \quad 1/(1/a) = a \quad 3 \quad 1/(ab) = (1/a)/(b)$
- 4  $b/a = b \times (1/a) \quad \text{Df}$

P8.4. On peut considérer le rapport  $b/a$  comme le produit de  $b$  par le réciproque de  $a$ . Ainsi toute division est réduite à une multiplication. Ces formules ont leurs correspondantes dans §n.

- 5  $a = b \implies 1/a = 1/b \implies a/b = 1$
- 6  $x \in \mathbb{R}, ax = b \implies x = b/a \quad \{ \text{AHMÈS N.24-38} \}$
- 7  $1/R = R$

+ \* 11.  $a, b, c, d, e, f \in N_1 \rightarrow$

- 1  $a/b = c/d \implies (a+b)/b = (c+d)/d \quad \{ \text{EUCLIDES v P18} \}$
- 2  $a/b = c/d = e/f \rightarrow a/b = (a+c+e)/(b+d+f) \quad \{ \text{» P12} \}$
- 3  $a/b = c/d, c/b = f/d \rightarrow (a+e)/b = (c+f)/d \quad \{ \text{» P24} \}$
- 4  $(a+c)/(b+d) = a/b \rightarrow c/d = a/b \quad \{ \text{EUCLIDES v P19} \}$

Les règles exprimées par ces P sont dites « componendo » et « dividendo ».

\* 12.0  $x, y \in \mathbb{R} \rightarrow$

$$x+y = 1 \wedge \exists z (u \in N_1, uv, uy \in N_1 \rightarrow u, ux+uy = uz) \quad \text{Df}$$

P12.0 « La somme de deux R,  $x+y$ , est le nombre rationnel  $z$ , qui satisfait à la condition  $ux+uy = uz$ , pour toute valeur du nombre entier  $u$ , sur lequel on puisse effectuer les opérations  $ux$  et  $uy$  en nombres entiers. »

$a, b, c, d \in N_1 \rightarrow$

$$\cdot 1 \quad a/c + b/c = (a+b)/c \quad \cdot 2 \quad a/b + c/d = (ad+bc)/(bd)$$

\* 13.  $a, b, c \in R \rightarrow$

$$\begin{aligned} \cdot 1 \quad a+b &\in R & \cdot 2 \quad a+b &= b+a \\ \cdot 3 \quad a+(b+c) &= (a+b)+c = a+b+c & \cdot 4 \quad a+c &= b+c \implies a=b \\ \cdot 5 \quad (R \mid N_0) \S + P7 & & \cdot 6 \quad R + R &= R & \cdot 7 \quad a(b+c) &= ab+ac \end{aligned}$$

\* 14.  $a, b, c \in R \rightarrow$

$$\cdot 1 \quad x, y \in R, x/a = y/b, x+y=c \implies x=ac/(a+b), y=bc/(a+b) \quad \} \text{AHMÈS N.63 \}$$

La règle pour décomposer un nombre  $c$  en parties proportionnelles aux nombres  $a$  et  $b$  est dite " règle de proportion " ou " de société ".

$$\begin{aligned} > * 15. a, b \in R \rightarrow: & \cdot 0 \quad b > a \implies a < b \implies b \in a+R \quad \text{Df} \\ \cdot 01 \quad b > a \implies & a \in N_1, ua, nb \in N_1, \bigcup_u, nb > ua \quad \text{Dfp} \\ \S > P2 \cdot 4 \cdot 7 & \quad \S \times P4 \cdot 1 \cdot 3 \end{aligned}$$

\* 16.  $a, b, c, d \in N_1 \rightarrow$

$$\begin{aligned} \cdot 1 \quad a/b > c/b \implies & a > c : a/b > a/d \implies b < d \quad \} \text{EUCL. v P10 \} \\ \cdot 2 \quad a/b > c/d \implies & ad > bc \\ \cdot 3 \quad a/b = c/d, a > b, & a > c \rightarrow a+d > b+c \quad \} \text{EUCL. v P25 \} \\ \cdot 4 \quad a/(a+b) < & (a+c)/(a+b+c) \\ \cdot 5 \quad a/b < c/d \rightarrow & a/b < (a+c)/(b+d) < c/d \quad \} \text{CHUQUET p.653:} \\ & \text{« La règle des nombres moyens. Numérateur avec numérateur se adjoignent} \\ & \text{et dénoñateur avec dénoñateur. » \} \\ & \} \text{PAPPUS VII P8 p.691 \} \end{aligned}$$

\* 17.  $a, b, c, d \in R \rightarrow$

$$\begin{aligned} \cdot 1 \quad b > a \implies & b/a < 1 \\ \cdot 2 \quad a > b, c < d \rightarrow & a/c > b/d : a < b, c > d \rightarrow a/c < b/d \\ \cdot 3 \quad a < b \implies & \exists R^{\wedge} x \exists (a < x < b) \\ \cdot 4 \quad a < b, m, n \in R \rightarrow & a < (ma+nb)/(m+n) < b \\ \cdot 5 \quad a \in R \neq 1 \rightarrow & a+1/a > 2 \end{aligned}$$

— \* 21.  $a, b \in N_1, c \in a+N_1, d \in b+N_1 \rightarrow$

$$\begin{aligned} \cdot 1 \quad c/a = d/b \implies & (c-a)/a = (d-b)/b \quad \} \text{EUCLIDES VII P11 \} \\ \cdot 2 \quad c/a = d/b \implies & (c+a)/(c-a) = (d+b)/(d-b) \end{aligned}$$

\* 22.0  $x \in R, y \in x+R \rightarrow y-x = 1 R^{\wedge} \exists z (x+z=y) \quad \text{Df}$

$$\begin{aligned} \cdot 1 \quad b, c \in N_1, a \in b+N_1 \rightarrow & a/c - b/c = (a-b)/c \\ \cdot 2 \quad a, b, c, d, ad-bc \in N_1 \rightarrow & a/b - c/d = (ad-bc)/(bd) \end{aligned}$$

- \* 23.  $a \in R, b \in a + R \Rightarrow \cdot 1 \quad b - a \in R \quad \cdot 2 \quad (b - a) + a = b$   
 \* 24.  $(R \mid N_0) \S - P2$   
 \* 25.  $a \in N_1, b \in n \times a \Rightarrow \cdot 0 \quad b/a = r \wedge x \exists (xa = b) \quad \text{Df}$   
 $\cdot 1 \cdot 5 = (n \mid N_1) P1 \cdot 1 \cdot 3 \quad \cdot 6 \quad 0/a = 0$

$r$  = (nombre rationnel relatif)

- \* 31 0  $r = n/N_1 \quad \text{Df} \quad \cdot 1 \quad r = +R \cup -R \cup \{0\} \quad \text{Dfp}$   
 $\cdot 2 \quad R_0 = R \cup \{0\} \quad \text{Df} \quad \{ \text{Ex. : } \S \text{mod } P2 \cdot 10$   
 $\cdot 3 \quad R \supset R_0 \supset r \quad \cdot 4 \quad n \supset r$   
 \* 32.  $x, y \in R \Rightarrow \cdot 1$   
 $\cdot 1 \quad x = y :=: u \in R, u + x, u + y \in R \Rightarrow u, u + x = u + y \quad \text{Df}$   
 $\cdot 2 \quad x + y = r \wedge \exists (u \in R, u + x, u + x + y \in R \Rightarrow u, u + x + y = u + z) \quad \text{Df}$   
 $\cdot 3 \quad -x = r \wedge y \exists (x + y = 0) \quad \text{Df}$   
 $\cdot 4 \quad x - y = x + (-y) \quad \text{Df}$   
 $\cdot 5 \quad x = y :=: u \in n, ux, uy \in n \Rightarrow u, ux = uy \quad \text{Dfp}$   
 $\cdot 6 \quad x \times y = xy = r \wedge \exists (u \in n, ux, uxy \in n \Rightarrow u, uxy = uz) \quad \text{Df}$   
 $\cdot 7 \quad /x = r \wedge y \exists (xy = 1) \quad \text{Df}$   
 $\cdot 8 \quad x/y = x \times (/y) \quad \text{Df}$   
 $\cdot 9 \quad x + y = r \wedge \exists (u \in n, ux, uy \in n \Rightarrow u, ux + uy = uz) \quad \text{Dfp}$   
 \* 33.  $a, b, c \in R \Rightarrow \cdot 1 \quad a + b \in R \quad \cdot 2 \cdot 3 = \S n \quad P4 \cdot 2 \cdot 3$   
 \* 34.  $----- \Rightarrow \cdot 1 \quad -a \in R \quad \cdot 2 \cdot 7 = \S n \quad P5 \cdot 2 \cdot 7$   
 \* 35.  $(r \mid n) \S n \quad P6 \cdot 0 \cdot 1$   
 \* 36.  $----- \Rightarrow \cdot 1 \quad a \times b \in R \quad \cdot 2 \cdot 7 = \S \times \quad P7 \cdot 2 \cdot 7 \quad P8$   
 \* 37.  $a, b \in R \cdot 0 \Rightarrow \cdot 1 \quad /a \in R \quad \cdot 2 \cdot 6 = P8 \cdot 2 \cdot 6$   
 $\cdot 7 \quad /-a = -/a$

- \* 40.  $a, b, c, d, a', b', c' \in R \Rightarrow \cdot 1 \quad a - c = 0 \Rightarrow x \in R, ax + b = cx + d := r = (d - b)/(a - c)$   
 $\{ \text{ARYABHATA } P31 :$

« Par la différence entre des objets  $[a - c]$  divisez la différence des roupies  $[d - b]$ , que possèdent deux personnes: le quotient  $[(d - b)/(a - c)]$  est la valeur d'un objet  $[=x]$ , si les fortunes sont égales  $[ax + b = cx + d]$  ».

- $\cdot 2 \quad x, y \in R, x + y = a, x - y = b := r = (a + b)/2, y = (a - b)/2$   
 $\{ \text{DIOPHANTUS I } 1 \}$

$$\cdot 3 \quad ab' - a'b = 0 \cdot \supset : x, y \in R, ax + by = c, a'x + b'y = c' \cdot \cdot \cdot \\ x = (cb' - c'b) / (ab' - a'b), y = (ac' - a'c) / (ab' - a'b)$$

Continuation : §Subst 5·6

$$\cdot 4 \quad \exists (x, y) \exists [x, y \in R, \cdot, c = 0, y = 0, ax + by = 0, a'x + b'y = 0] \\ \cdot \cdot \cdot ab' - a'b = 0$$

$$\cdot 5 \quad x, y, z \in R, y + z = a, z + x = b, x + y = c \cdot \cdot \cdot x = (b + c - a) / 2, \\ y = (a + c - b) / 2, z = (a + b - c) / 2 \quad \{ \text{DIOPHANTUS I 16} \}$$

$$\cdot 6 \quad x, y, z \in R, y + z - x = a, z + x - y = b, x + y - z = c \cdot \cdot \cdot \\ x = (b + c) / 2, y = \dots \quad \{ \text{DIOPHANTUS I 18} \}$$

$$\cdot 7 \quad x, y, z, t \in R, y + z + t = a, x + z + t = b, x + y + t = c, x + y + \\ z = d \cdot \cdot \cdot x = (b + c + d - 2a) / 3, y = \dots \quad \{ \text{DIOPHANTUS I 17} \}$$

$$\cdot 8 \quad x, y, z, t \in R, y + z + t - x = a, x + z + t - y = b, x + y + t - z = c, \\ x + y + z - t = d \cdot \cdot \cdot x = (a + b + c + d) / 4 - a / 2, y = \dots \\ \{ \text{DIOPHANTUS I 19} \}$$

$$\ast \quad 41 \cdot 0 \quad a, b, c \in R \cdot 0, a = b, b = c, c = a, a + b + c = 0 \cdot \supset. \\ [(a - b) / c + (b - c) / a + (c - a) / b] [c / (a - b) + a / (b - c) + b / (c - a)] = 9 \\ \{ \text{PRIOR a.1878; Cfr. Mn. a.1881 t.10 p.33} \}$$

$$\ast \quad 42. \quad a, b \in R \cdot \supset : \cdot 0 \quad b > a \cdot \cdot \cdot b \in a + R \\ \cdot 01 \cdot 9 = (R, R) \mid (N_1, n) \quad \S n \text{ P7} \quad \cdot 91 \quad b > a \cdot \cdot \cdot \exists (a + R) \wedge (b - R) \\ \text{Les Df de } E, \beta, \vartheta, l', l, \text{ sont composées par les seuls signes qui précèdent.}$$

## §25 ↑ = (puissance)

$N_0 + \times * 1. a, b, m, n \in N_0. \supset$

·0  $a \uparrow m = a^m = 1[(\times a)m] \} = "a \text{ élevé à la puissance } m"$  } Df

Note. Euclide indique les puissances par une périphrase.

Dans Chuquet, a.1484 et ses contemporains, la base est sous-entendue; elle est l'inconnue du problème.

Girard a.1629 adopte la notation  $(m)a$ .

La notation  $a^m$  a été introduite dans l'usage commun par Descartes, a.1644; nous la suivrons ici lorsque l'exposant est simple.

La notation  $a \uparrow m$  se rencontre dans Pell a.1659 (cfr. Wallis t.2 p.239); mais nous avons donné la forme ↑, qui est le signe de racine renversé, au signe de Pell, qui est la sigle grecque de la terminaison  $\sigma\varsigma$ .

La notation  $a \uparrow m$  est plus commode lorsque l'exposant est composé; en écrivant l'exposant en caractères plus petits on rencontre des difficultés de lecture remarquées dans IdM. a.1900 p.271, et des difficultés typographiques encore plus graves. Par ces raisons plusieurs A. écrivent  $\exp x$  au lieu de  $e^x$ .

·1  $a \uparrow 0 = 1$  ·2  $a \uparrow (m+1) = (a \uparrow m) \times a$  Dfp  
[  $(N_0, \times a, 1) | (s, u, a) \S + P10.1.2. \supset. P.1.2$  ]

·21  $a \uparrow 1 = a^1 = a$  ·  $a \uparrow 2 = a^2 = a \times a$

·22  $1 \uparrow m = 1^m = 1$  ·23  $0 \uparrow (m+1) = 0$

·3  $a \uparrow m \in N_0$  [  $(N_0, \times a, 1) | (s, u, a) \S + P10.3. \supset. P$  ]

·4  $(a \uparrow m) \times (a \uparrow n) = a \uparrow (m+n)$  [ —————·8 ——— ]  
{ DIOPHANTUS Arith. I }

·5  $(a \times b) \uparrow m = (a \uparrow m) \times (b \uparrow m)$  } Distrib(↑, ×) {  
[  $(N_0, \times a, \times b, 1) | (s, u, v, a) \S + P10.62. \supset. P$  ]

·6  $(a \uparrow m) \uparrow n = a \uparrow (m \times n)$  [  $(N_0, \times a, m, n, 1) | (s, u, a, b, x) \S \times P2.4. \supset. P$  ]  
{ EUCLIDES IX P3-4, 8, 9, 11 }

\* 2.  $a, b \in N_0. \supset$

·1  $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$  } EUCLIDES II P4 {

$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$  } DIOPHANTUS IV P9 {

$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$

$(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$

$(a+b)^6 = a^6 + 6a^5b + 15a^4b^2 + 20a^3b^3 + 15a^2b^4 + 6ab^5 + b^6$

$(a+b)^7 = a^7 + 7a^6b + 21a^5b^2 + 35a^4b^3 + 35a^3b^4 + 21a^2b^5 + 7ab^6 + b^7$

$(a+b)^8 = a^8 + 8a^7b + 28a^6b^2 + 56a^5b^3 + 70a^4b^4 + 56a^3b^5 + 28a^2b^6$   
 $+ 8ab^7 + b^8$  Continuation : §C P7.1

{ TSCHU SCHI KIH a.1303; STIFEL, *Arithmetica integra*, a.1544, liber 1 c. 5; TARTAGLIA a.1556 p.73:

«Se una quantità sarà divisa in due parti, come si voglia, il cubo censo censo di tutta la quantità  $[a+b]^{12}$  sempre sarà eguale a questi 13 principali producti, cioè al prodotto del cubo censo censo della prima parte  $[a^{12}]$ . Et al prodotto 12uplo del terzo relato della detta prima parte via la seconda parte  $[12a^{11}b]$ . Et al prodotto del 66uplo del censo relato della detta prima parte via il censo della seconda  $[66a^{10}b^2]$ ....., et finalmente al prodotto del cen. cen. cen. della seconda parte  $[b^{12}]$ ...., et con tal modo potrai procedere in infinito. »{

- 11  $(a+b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a+b)$
- 12  $(a+b)^4 + a^4 + b^4 = 2(a^2 + ab + b^2)^2$
- 13  $a^2(a+b)^2 + a^2b^2 + (a+b)^2b^2 = (a^2 + ab + b^2)^2$
- 14  $(a+b)^5 = a^5 + b^5 + 5ab(a+b)(a^2 + ab + b^2)$
- 15  $(a+b)^7 = a^7 + b^7 + 7ab(a+b)(a^2 + ab + b^2)^2$   
 } •14-15 CAUCHY a.1839 Œuvres s.1 t.4 p.501 {
- 16  $(a+b)^8 + a^8 + b^8 = 2(a^2 + ab + b^2)[(a^2 + ab + b^2)^3 + 4a^2b^2(a+b)^2]$
- 17  $(a+b)^{10} + a^{10} + b^{10} = (a^2 + ab + b^2)^2 [2(a^2 + ab + b^2)^3 + 15a^2b^2(a+b)^2]$

\* 3.  $a, b, c \in X_0 \cup$ .

- 1  $(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$
- 2  $(a+b+c)^3 = a^3 + b^3 + c^3 + 3(a^2b + ab^2 + a^2c + ac^2 + b^2c + bc^2) + 6abc$
- 3 »  $= a^3 + b^3 + c^3 + 3(a+b)(a+c)(b+c)$
- 4 »  $+ 3abc = a^3 + b^3 + c^3 + 3(a+b+c)(ab+ac+bc)$
- 5 »  $+ a^3 + b^3 + c^3 = (b+c)^3 + (c+a)^3 + (a+b)^3 + 6abc$
- 6  $(a+b+c)^4 = a^4 + b^4 + c^4 + 4(a^3b + a^3c + b^3a + b^3c + c^3a + c^3b) + 6(a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2) + 12(a^2bc + b^2ac + c^2ab) + (a^4 + b^4 + c^4) = 2(a^2 + b^2 + c^2)(a+b+c)^2 + 8abc(a+b+c) + 2(a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2)$
- 8  $(a+b+c)^4 + a^4 + b^4 + c^4 = (a+b)^4 + (a+c)^4 + (b+c)^4 + 12abc(a+b+c)$
- 9  $(a+b+c)^5 = a^5 + b^5 + c^5 + 5(a+b)(a+c)(b+c)(a^2 + b^2 + c^2 + ab + ac + bc)$

Continuation : §! P8.

\* 4.  $a, b, m, n \in X_1 \cup$ :

- 01  $a^2 \in X_1b^2 \implies a \in X_1b$       •02  $a^3 \in X_1b^3 \implies a \in X_1b$   
 } EUCLIDES VIII P14-17:

Ἐὰν τετράγωνος τετράγωνον μετρήῃ, καὶ ἡ πλεονὸς τὴν πλεονὸν μετρήσῃ





- 3  $2 \times (N_0^2 + N_0^2) \supset N_0^2 + N_0^2$  .  $(N_1^2 + N_1^2) \times (N_1^2 + N_1^2) \supset N_0^2 + N_1^2$   
 $(2N_0 + 1) \cdot (8N_0 + 7) \supset N_0^2 + N_0^2 + N_1^2$  } LEGENDRE a.1797 p.398 {  
 $2N_0 + 1 \supset N_0^2 + N_0^2 + 2N_0^2$  » »  
 $n \in N_1 \cdot \supset (N_0^2 + N_0^2 + N_0^2)^n \supset N_0^2 + N_0^2 + N_0^2$
- 4  $N_1 \supset N_1^2 + N_0^2 + N_0^2 + N_0^2$  } BACHET a.1621 p.241 :  
 « Omnem autem numerum vel quadratum esse vel ex duobus aut tribus  
 aut etiam quatuor quadratis componi, satis experiendo deprehendis. »  
 } Dem. Cfr. FERMAT t.1 p.305 : LAGRANGE a.1770 t.3 p.189 {
- 41  $(N_1 + 1)^2 \supset N_1^2 + N_1^2 + N_0^2 + N_0^2$   
 } P. TANNERY IdM. a.1898 t.5 p.281 {
- 42  $(8N_0 + 7) \times N_1^2 \supset N_1^2 + N_1^2 + N_1^2 + N_1^2$  } FERMAT a.1636 t.2 p.66 :  
 « Octuplum cuiuslibet numeri unitate diminutum componitur ex quatuor  
 quadratis tantum, non solum in integris sed etiam in fractis. »
- 5  $a, b, c \in N_1$  .  $a^2 = b^2 + c^2 \cdot \supset b \in 3N_1 \cup c \in 3N_1$  .  $b \in 4N_1 \cup c \in 4N_1$  .  
 $a \in 5N_1 \cup b \in 5N_1 \cup c \in 5N_1$  .  $abc \in 60N_1$   
 } FRÉNICLE a.1676 p.76-79 {
- 6  
 $2 \nmid (2 \nmid 5) + 1 \in N_1 \times [2^5(2^2 + 1) + 1]$  } EULER PetrC. a.1732 t.6 p.104 {  
 $2 \nmid (2 \nmid 6) + 1 \in N_1 \times [2^8(2^{10} + 2^5 + 2^4 - 1) + 1]$  } LANDRY {  
 $2 \nmid (2 \nmid 12) + 1 \in N_1 \times [2^{15}(2^3 - 1) + 1]$  } PERVOUCHINE PetrB. a.1878 {  
 $2 \nmid (2 \nmid 23) + 1 \in N_1 \times [2^{25}(2^3 + 1) + 1]$  } » » {  
 $2 \nmid (2 \nmid 36) + 1 \in N_1 \times [2^{39}(2^2 + 1) + 1]$  } SEELHOFF Zm. a.1886 t.31 p.173 {  
 Continuation : §Np 3·4
- 7  $a, b \in N_1$  .  $m \in 2N_1 + 1 \cdot \supset a^m + b^m \in N_1 \times (a + b)$

# \* 6.

- 0  $\neg \exists (N_1^3 + N_1^3) \wedge N_1^3$  } ALCHODSCHANDÎ a.992 {
- 1  $n \in N_0 + 3 \cdot \supset \neg \exists (N_1^n + N_1^n) \wedge N_1^n$  } FERMAT t.1 p.291 :  
 « Cubum autem in duos cubos, aut quadratoquadratum in duos quadrato-  
 quadratos, et generaliter nullam in infinitum ultra quadratum potestatem  
 in duas eiusdem nominis fas est dividere: cuius rei demonstrationem mi-  
 rabilem sane detexi. »
- La démon. se réduit au cas où  $n \in Np$ . KUMMER, a.1850 JFM. p.138, a dé-  
 montré cette P. si :  $n \in 1 \cdots n-3/2 \cdot \supset_c$  ut  $B_p \neg \exists N_1 \times n$ .
- 2  $\neg \exists [N_1^3 \times (4N_0 + 3)] \wedge (N_0^2 + N_0^2)$  } FERMAT a.1640 t.2 p.203 :  
 « Un nombre moindre de l'unité qu'un multiple du quaternaire n'est ni  
 quarré, ni composé de deux quarrés, ni en entiers, ni en fractions. »
- 3  $\neg \exists [N_1^2 \times (8N_0 + 7)] \wedge (N_0^2 + N_0^2 + N_0^2)$  } FERMAT voir 5·42 {
- 4  $\neg \exists (N_1^4 + N_1^4) \wedge N_1^2$  .  $\neg \exists (N_1^4 + N_1^2) \wedge N_1^4$  } FERMAT t.1 p.327 {

> \* 9.  $a, b \in N_1$ .  $a = b$  .  $\supset$ .

·01  $a^2 + b^2 > 2ab$  [  $(a-b)^2 > 0$  .  $\supset$  . P ]

·02  $2(a^2 + b^2) > (a+b)^2$  [ P·01 .  $\supset$  . P ]

·03  $(a+b)^2 > 4ab$  { EUCLIDES VI P27 } [ P·04 .  $\supset$  . P ]

·04  $2(a^3 + b^3) > (a+b)(a^2 + b^2)$  [  $2(a^3 + b^3) - (a+b)(a^2 + b^2) = (a-b)^2(a+b) > 0$  ]

·05  $4(a^3 + b^3) > (a+b)^3$  [ P·04 .  $\supset$  .  $4(a^3 + b^3) > (a+b) \times 2(a^2 + b^2)$  . P·02 .  $\supset$  . P ]

·06  $a^3 + b^3 > ab(a+b)$  { HARRIOT p.79 } [P·05 .  $\supset$  . P]

·07  $3(a^4 + a^2b^2 + b^4) > (a^2 + ab + b^2)^2$  { BERTRAND a.1855 p.142 }

·08  $2(a^4 + a^2b^2 + b^4) > 3ab(a^2 + b^2)$

·09  $4(a^2 + ab + b^2)^3 > 27a^2b^2(a^2 + b^2)^2$  { HARRIOT a.1631 p.85 }

$a, b, c \in N_1$  .  $a = b = c$  .  $\supset$ .

·11  $a^2 + b^2 + c^2 > ab + ac + bc$  [  $(a-b)^2 + (a-c)^2 + (b-c)^2 \geq 0$  .  $\supset$  . P ]

·12  $3(a^2 + b^2 + c^2) > (a+b+c)^2 > 3(ab + ac + bc)$

·13  $a < b < c$  .  $a+b > c$  .  $\supset$  .  $2(ab + ac + bc) > a^2 + b^2 + c^2$

·15  $3(a^3 + b^3 + c^3) > (a+b+c)(a^2 + b^2 + c^2)$

[  $3(a^3 + b^3 + c^3) - (a+b+c)(a^2 + b^2 + c^2) = (a-b)^2(a+b) + (b-c)^2(b+c) + (c-a)^2(c+a)$  ]

·16  $2(a^3 + b^3 + c^3) > a^2(b+c) + b^2(c+a) + c^2(a+b)$  [ P·15 .  $\supset$  . P ]

·17  $3(a^3 + b^3 + c^3) > (a+b+c)(ab + ac + bc)$  [ P·11 . P·15 .  $\supset$  . P ]

·18  $9(a^3 + b^3 + c^3) > (a+b+c)^3$  [ P·15 . P·12 .  $\supset$  . P ]

·19  $a^2(b+c) + b^2(c+a) + c^2(a+b) > 6abc$

[  $a^2(b+c) + b^2(c+a) + c^2(a+b) - 6abc = a(b-c)^2 + b(c-a)^2 + c(a-b)^2$  ]

·20  $a^3 + b^3 + c^3 > 3abc$  [ P·16 . P·19 .  $\supset$  . P ]

{ ·11·12·19·20 HARRIOT a.1631 p.84 }

·21  $8(a^3 + b^3 + c^3) > 3(a+b)(a+c)(b+c)$  [ P·16 . P·20 .  $\supset$  . P ]

·22  $(a+b+c)(a^2 + b^2 + c^2) > 9abc$  [ P·19 . P·20 .  $\supset$  . P ]

·23  $2(a+b+c)(a^2 + b^2 + c^2) > 3[a^2(b+c) + b^2(c+a) + c^2(a+b)]$  [P·16  $\supset$  P]

·24  $(a+b+c)^3 > 27abc$  [ P·19 . P·20 .  $\supset$  . P ]

{ HARRIOT a.1631 p.85 : « Si quantitas secetur in tres partes inæ-

quales Cubus è tertia parte totius major est solido è tribus partibus inæqualibus. Si sint quantitatis tres partes inæquales  $p$ ,  $q$ ,  $r$ , est...

$$\frac{p+q+r}{p+q+r} > 27pqr$$

» {

·25  $(a+b)(b+c)(c+a) > 8abc$  [ P·19 .  $\supset$  . P ]

·26  $a^3 + b^3 + c^3 + 3abc > a^2(b+c) + b^2(c+a) + c^2(a+b)$

·27  $a > b > c$  .  $\supset$  .  $a^2b + b^2c + c^2a > a^2c + b^2a + c^2b$  [ P·14·11 .  $\supset$  . P ]

·30  $(ab + ac + bc)^2 > 3abc(a+b+c)$

·31  $a^4 + b^4 + c^4 > abc(a+b+c)$

- 32  $(a+b+c)(a^3+b^3+c^3) \geq (a^2+b^2+c^2)^2$   
 $a, b, c, d \in \mathbb{N}_1, \neg(a=b=c=d) \rightarrow \bigcup$   
 •41  $4(a^2+b^2+c^2+d^2) > (a+b+c+d)^2$  [ P14:08  $\supset$  P ]  
 •42  $3(a^2+b^2+c^2+d^2) > 2(ab+ac+ad+bc+bd+cd)$   
 •43  $3(a+b+c+d)^2 \geq 8(\dots)$   
 •51  $a, b, c, d \in \mathbb{N}_1, \neg(a=b=c=d) \rightarrow \bigcup, (a^2+b^2) \times (c^2+d^2) > (ac+bd)^2$   
 •52  $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{N}_1, \neg(a=d=b=e=c=f) \rightarrow \bigcup$   
 $(a^2+b^2+c^2) \times (d^2+e^2+f^2) > (ad+be+cf)^2$  [ P14:53  $\supset$  P ]  
 Continuation : §N20.

- \* 10.  $a, b, m, n \in \mathbb{N}_1 \rightarrow \bigcup$ . •1  $a > b \Rightarrow a^m > b^m$   
 •2  $a > 1 \rightarrow \bigcup: m > n \Rightarrow a^m > a^n$   
 $a = b \rightarrow \bigcup$ . •3  $a^{m-2} + b^{m-2} > ab(a^m + b^m)$   
 [  $a^{m+2} + b^{m+2} - ab(a^{m+1} + b^{m+1}) = (a-b)(a^{m+1} + b^{m+1})$  ]  
 •4  $2^m(a^{m+1} + b^{m+1}) > (a+b)^{m+1}$   
 — n \* 11.  $a, b \in \mathbb{N}, m, n \in \mathbb{N}_0 \rightarrow \bigcup$ . •0•2 = P1•0•2 •3  $a^m \in \mathbb{N}$   
 •4•6 = P1•4•6 •7  $(-a)^2 = a^2$   
 •71  $(-a) \nmid 2m = a \nmid 2m$  •72  $(-a) \nmid 2m+1 = -a \nmid 2m+1$

\* 12-13.  $a, b, c \in \mathbb{N} \rightarrow \bigcup$ . P2.3.

- \* 14.  $a, b, c, d, e, f, g, h, a', b', c', d', e', f', g', h', p, q \in \mathbb{N} \rightarrow \bigcup$ :  
 •01  $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$   
 •02  $(a+b)^2 + (a-b)^2 = 2(a^2 + b^2)$  } EUCLIDES II P9 {  
 •03  $(a+b)^3 - (a-b)^3 = 4ab$  } » » P5 {  
 •04  $(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 =$   
 $2[(a-b)(a-c) + (b-c)(b-a) + (c-a)(c-b)]$   
 •05  $(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 + (a+b+c)^2 = 3(a^2 + b^2 + c^2)$   
 •06  $(a+b+c)^2 + (a+b-c)^2 + (a-b+c)^2 + (-a+b+c)^2 = 4(a^2 + b^2 + c^2)$   
 •061  $(a+2b)(b+c-a) + (b+2c)(a-b+c) + (c+2a)(a+b-c) = (a+b+c)^2$   
 •062  $3(a+b+c)^2 = (a+b-c)^2 + (b+c-a)^2 + (c+a-b)^2 + 8(ab+ac+bc)$   
 •07  $(-a+2b+2c)^2 + 2(a-b+2c)^2 + (2a+2b-c)^2 = 9(a^2+b^2+c^2)$   
 •08  $(a+b+c+d)^2 + (a+b-c-d)^2 + (a+c-b-d)^2 + (a+d-b-c)^2 =$   
 $(-a+b+c+d)^2 + (a-b+c+d)^2 + (a+b-c+d)^2 + (a+b+c-d)^2 =$   
 $4(a^2+b^2+c^2+d^2)$  } LEGENDRE a.1816 p.8 {  
 •09  $a+b+c+d+e = 5m \rightarrow \bigcup. a^2+b^2+c^2+d^2+e^2 =$   
 $(2m-a)^2 + (2m-b)^2 + (2m-c)^2 + (2m-d)^2 + (2m-e)^2$   
 } •07•09 EULER a.1750 CorrM. t.1 p.515 {

- 10  $(a^2+ab+b^2)(a-b) = a^3-b^3$   
 ·11  $a^3(b-c)+b^3(c-a)+c^3(a-b) = (a-b)(b-c)(c-a)$   
 ·12  $a(b^2-c^2)+b(c^2-a^2)+c(a^2-b^2) = (b-a)(c-a)(c-b)$   
 ·121  $(a-b)^2(a+b-2c)+(b-c)^2(b+c-2a)+(c-a)^2(c+a-2b) =$   
 $3(a-b)(b-c)(c-a)$   
 ·122  $(a+b)^2(a-b)+(b+c)^2(b-c)+(c+a)^2(c-a) = -(a-b)(b-c)(c-a)$   
 ·13  $(a+b+c)^3-(b+c-a)^3-(c+a-b)^3-(a+b-c)^3 = 24abc$   
 } GERGONNE Ann. a.1816-17 t.7 p.163 {  
 ·14  $a^3+b^3+c^3-3abc = (a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc)$   
 ·15  $a^3+b^3+c^3+d^3-3(abc+abd+acd+bcd) = (a+b+c+d)(a^2+b^2+c^2+d^2-ab-bc-ca-ad-bd-cd)$   
 ·16  $(a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c) =$   
 $a^2(b+c-a)+b^2(a+c-b)+c^2(a+b-c)-2abc$   
 ·17  $(a-b)^3+(b-c)^3+(c-a)^3 = 3(a-b)(b-c)(c-a)$   
 ·21  $(a^3+a^2b+ab^2+b^3)(a-b) = a^4-b^4$   
 ·22  $(a^2+ab+b^2)^2-(a^2-ab+b^2)^2 = 4ab(a^2+b^2)$   
 ·23  $(a(a-2b)^3-b(b-2a)^3) = (a-b)(a+b)^3$   
 ·24  $(a^2+b^2)^2 = (a^2-b^2)^2+(2ab)^2$  } EUCLIDES x lemma P29 {  
 Cette P a été attribuée à Pythagore et à Platon par les commentateurs d'Euclides. Voir Proclus ed. Friedlein, Lipsie a.1873 p.418; Euclides t.5 p.214.  
 ·25  $a^4+4b^4 = (a^2+2ab+2b^2)(a^2-2ab+2b^2)$   
 } EULER a.1742 CorrM. t.1 p.145 {  
 ·26  $a^4+a^2b^2+b^4 = (a^2+ab+b^2)(a^2-ab+b^2)$   
 ·27  $a^4+b^4-ab(a^2+b^2) = (a-b)^2(a^2+ab+b^2)$   
 ·28  $(a+b)^4-(a-b)^4 = 8ab(a^2+b^2)$   
 } CAUCHY Exerc. a.1841 t.2 p.144 {  
 ·31  $a(b-c)^3+b(c-a)^3+c(a-b)^3 = (a-b)(b-c)(c-a)(a+b+c)$   
 ·32  $a^3(b-c)+b^3(c-a)+c^3(a-b) = (a-b)(b-c)(c-a)(a+b+c)$   
 ·33  $(a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c) =$   
 $2(a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2)-(a^4+b^4+c^4) = (a^2+b^2+c^2)^2-2(a^4+b^4+c^4)$   
 ·34  $[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2]^2 = 2[(a-b)^4+(b-c)^4+(c-a)^4]$   
 ·35  $a^4+b^4+c^4 = (a+b+c)(a-b-c)(b-c-a)(c-a-b) +$   
 $2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)$   
 ·36  $(a+b)(a-b)^3+(b+c)(b-c)^3+(c+a)(c-a)^3 =$   
 $2(a+b+c)(a-b)(b-c)(c-a)$   
 ·37  $ab(a^2-b^2)+bc(b^2-c^2)+ca(c^2-a^2) = -(a+b+c)(a-b)(b-c)(c-a)$   
 $ab(a+b)^2+bc(b+c)^2+ca(c+a)^2 = (a+b+c)[(a+b)(b+c)(c+a)-4abc]$   
 $a(b-c)(b+c-a)^2+b(c-a)(c+a-b)^2+c(a-b)(a+b-c)^2 = 0$

$$41 \quad (a^2+b^2)(c^2+d^2)=(ac+bd)^2+(ad-bc)^2 \quad (ac-bd)^2+(ad+bc)^2$$

} DIOPHANTUS III 122 {

$$42 \quad (a^2 - b^2)(c^2 - d^2) = (ac - bd)^2 - (ad - bc)^2$$

43  $(a^2+b^2+c^2+d^2)^2 = a^2+b^2-c^2-d^2)^2 + 2ac \pm 2bd)^2 + 2bc \mp 2ad)^2$   
 } P. TANNERY IdM. a.1898 p.282 {

$$51 \quad (a^2 + b^2)(a'^2 + b'^2) = (aa' + bb')^2 + (ab' - a'b)^2$$

$$= (aa' - cbb')^2 + cab' + a'b^2$$

$$53 \quad (a^2+b^2+c^2)(a'^2+b'^2+c'^2)-(aa'+bb'+cc')^2 = \\ (ab'-a'b)^2+(ac'-a'c)^2+(bc'-b'c)^2$$

$$\begin{aligned} & 34 \quad (a^2+b^2+c^2+a^3+b^3+c^3+ab+bb'+cc'+cd)^2+(ab'- \\ & \quad a'b+cd'-c'd)^2+(ac'-a'c-bd'+b'd)^2+(ad'-a'd+bc'-b'c)^2 \\ & \} \text{EULER PetrNC. t.5 a.1754 p.54} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & (a^2 - pb^2 - qc^2 + pqd^2)(a'^2 - p'b'^2 - q'c'^2 + p'q'd'^2) = \\ & (aa' + pbb' \pm qc'c' + pdd')^2 - p(ab' + a'b \pm qc'd' + c'd)^2 \\ & - q(ac' - pbd' \pm a'dc - pbd)^2 + pq(bc' - ad' \pm a'd - bcd)^2 \\ & \} \text{LAGRANGE a.1770 t.3 p.201} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + (a^2+b^2+c^2+d^2+e^2+f^2+g^2+h^2+a'^2+b'^2+c'^2+d'^2+e'^2+f'^2+g'^2+h'^2) \\
& = (aa'+bb'+cc'+dd'+ee'+ff'+gg'+hh')^2 \\
& + (ab'-ba'+cd'-dc'+ef'-fe'+gh'-hg')^2 \\
& + (ac'+bd'-ca'-db'+eg'-fh'-ge'+hf')^2 \\
& + (ad'+be'-cb'-da'+eh'+fi'-gf'-he')^2 \\
& + (ae'-bf'+cg'-dh'-ea'+fb'-gc'+hd')^2 \\
& + (af'+be'-ch'-dg'-eb'-fa'+gd'+he')^2 \\
& + (ag'-bh'-ce'+df'+ec'-fd'-ge'+hb')^2 \\
& + (ah'+bg'+cf'+de'-ed'-fe'-gb'-ha')^2
\end{aligned}$$

} DEGEN, Mém. de l'Acad. de St. Pétersbourg, a.1822 t.8 p.4 {

61  $x=ab$  ,  $y=(a+b)b$  ,  $z=(a+a+ba^2+ab+2b^2)$  ,  $w=(a^2+ab+b^3)$  .  $\therefore x^4+y^4+z^2=w^4$

$$\bullet 7 \quad a^3(b^2 - c^2) + b^3(c^2 - a^2) + c^3(a^2 - b^2) = (a - b)(a - c)(b - c)(ab + ac + bc)$$

$$\cdot 71 \quad (a^5 + b^5 - ab(a^3 + b^3)) = (a + b)(a - b)^2(a^2 + b^2)$$

7.2  $(a+b+c)^5 = (a+b-c)^5 + (b+c-a)^5 + (c+a-b)^5 + 80abc(a^2+b^2+c^2)$   
 } CAUCHY Exercises a.1841 t.2 p.144 {

$$\text{7.3 } (a-b)^5 + (b-c)^5 + (c-a)^5 = 5(a-b)(b-c)(c-a)[(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2]$$

- \*8  $(a^3+a^2b+ab^2+b^3)^2+(a^3-a^2b+ab^2-b^3)^2=2(a^2+b^2)^3$   
 \*81  $(a^3+a^2b-ab^2-b^3)^2-(a^3-a^2b-ab^2+b^3)^2=4ab(a^2-b^2)^2$   
 \*82  $(a^3+a^2b-ab^2+b^3)^2-(a^3-a^2b-ab^2-b^3)^2=4ab(a^2+b^2)(a^2-b^2)$   
 \*9  $(a^7+b^7-ab^6a^5+b^5a^7)=(a+b)(a-b)^2(a^2+ab+b^2)(a^2-ab+b^2)$   
 \*91  $(a^6+b^6)(a+b)-2ab(a^5+b^5)=(a-b)^2(a+b)(a^2+ab+b^2)(a^2-ab+b^2)$   
 \*92  $(a^6+b^6)(a+b)-(a^2+b^2)(a^5+b^5)=(a-b)^2(a+b)(a^2+b^2)ab$   
 \*93  $(a+b+c)^7-(a+b-c)^7-(a-b+c)^7-(-a+b+c)^7=$   
 $56abc[3(a^2+b^2+c^2)+16(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)]$   
 } LAMÉ a.1840 JdM. t.5 p.197 {  
 \*94  $(a^4+a^3b-a^2b^2+ab^3+b^4)^2-(a^4-a^3b-a^2b^2-ab^3+b^4)^2=$   
 $4ab(a^2+b^2)(a^4-a^2b^2+b^4)$   
 \*95  $(a^4+a^3b-a^2b^2+ab^3+b^4)^2-(a^4-a^3b-a^2b^2+ab^3+b^4)^2=$   
 $4ab(a^2-b^2)(a^4-a^2b^2+b^4)$   
 \*96  $(a^9+b^9-ab(a^7+b^7))=(a+b)(a-b)^2(a^2+b^2)(a^4+b^4)$

\* 15\*0  $n \in \text{Cls'n} \text{ , } c \in \text{Cls'n}_0 \text{ , } a \in n \text{ , } b \in N_0 \text{ , } \supset \text{ P5*0}$

- \*1  $4n \supset n^2-n^2$  \*11  $n \in N_1+1 \text{ , } \supset \text{ , } N_0^n \supset N_0^2-N_0^2$   
 \*12  $a \in (2N_0+1)-(5N_0) \text{ , } \supset \text{ , } a^4-1 \in 80N_0$   
 \*13  $n \supset n^3+n^3+n^3+n^3+n^3$  } OLTRAMARE IdM. a.1895 p.25,166 {  
 $a \in n \text{ , } \supset \text{ , } *2 \text{ } (2a-1)^2-1 \in 8n$  \*21  $a(a^2-1) \in 6n$   
 \*22  $a^2(a^2-1) \in 12n$  } LEIBNIZ MathS. t.7 p.101 {  
 \*23  $a(a^2-1)(a^2-4) \in 120n$  Continuation : §! P1\*1  
 \*24  $a^2(a^4-1) \in 60n$  ,  $a^2(a^2-1)(a^4-16) \in 3600n$   
 \*25  $a^2(a^2-2)(a^4-1)(a^4-16) \in 25200n$  \*26  $a(a^{12}-1) \in 2730n$   
 \*27  $a^2(a^4-1)(a^4-9)(a^4-16) \in 46800n$   
 $a,b \in n \text{ , } \supset \text{ , } *3 \text{ } ab(a^2-b^2) \in 6n$  \*31  $ab(a^2+b^2)(a^2-b^2) \in 30n$   
 \*4  $a \in 2n+1 \text{ , } \supset \text{ , } a(a^4-1) \in 240n$  ,  $a^2(a^2-1)(a^4-1) \in 5760n$  ,  
 $a^2(a^2-1)(a^6-1) \in 4032n$  ,  $a^2(a^4-1)(a^8-1) \in 115200n$   
 \*5  $n \in N_0 \text{ , } \supset \text{ , } 11^{2n}-2^{6n} \in 57N_0$  ,  $2^{2n}-3n-1 \in 9N_0$  ,  
 $2^{3n-2}+21n-4 \in 49N_0$  ,  $3^{2n}-8n-1 \in 64N_0$  ,  $2^{n^2}-15n-1 \in 225N_0$  ,  
 $7^{2n-1}-48n-7 \in 288N_0$  ,  
 $3^{3n-3}+7^n \times 2^{3n-1} \in 29N_1$  ,  $2^{5n} \times 3^{4n}-4^{3n} \times 5^{2n} \in 992N_1$   
 \*6  $a,b \in n \text{ , } m \in N_1 \text{ , } \supset \text{ , } a^m-b^m \in n \times (a-b)$  ,  $a^{2m}-b^{2m} \in n \times (a+b)$   
 \*61  $a \in n \text{ , } n \in N_1-3N_1 \text{ , } \supset \text{ , } a^{2n}+a^n+1 \in N_1 \times (a^2+a+1)$   
 } EULER Op. post. t.1 p.186 {

\* 7.  $m \in 6N_1 - 1, a, b \in N_1, \supset$

$$(a+b)^m - a^m - b^m \in mab(a+b)(a^2+ab+b^2) \times N_1$$

\* 71.  $m \in 6N_1 + 1, a, b \in N_1, \supset$

$$(a+b)^m - a^m - b^m \in mab(a+b)(a^2+ab+b^2)^2 \times N_1$$

} CARCHY a.1839 (Euvres s.1 t.4 p.501; Exerc. a.1841 t.2 p.137 {

\* 16.  $a, b, c \in N_1, a = b = c, \supset$

$$1) a+b-c^2 + (a+c-b)^2 + (b+c-a)^2 > ab+bc+ca$$

$$2) abc > (a+b-c)(a+c-b)(b+c-a) \quad \text{BERTRAND a.1855 p.142 {}$$

$$[b+c-a, a+c-b, a+b-c] (a, b, c) \text{ P9.25 } \supset, \text{ P1}$$

$$3) (a-b)^2(a+b-c) + (b-c)^2(b+c-a) + (c-a)^2(c+a-b) > 0$$

\* 21.  $a, b \in R, m, n \in N_0, \supset, 10.2 = \text{P10.2} \quad 13) a^m \in R$

$$14.6 = \text{P14.6} \quad 17) \sqrt{a^2} = |a| \quad 171) (a/b)^m = a^m/b^m$$

$$(R \mid N_0) \text{ P2, 3, } (R \mid N_1) \text{ P9, 10}$$

\* 22.

$$1) m \in N_1 + 1, a \in R, \supset, (1+a)^m > 1+ma$$

$$[ \text{Hp, } m=2 \supset, 1+a^2 = 1+2a+a^2 > 1+2a \quad (1)$$

$$\text{Hp, } (1+a)^m > 1+ma \supset,$$

$$1+a^{m+1} > (1+ma)(1+a) > 1+(m+1)a+a^2 > 1+(m+1)a \quad (2)$$

$$(1 \leq 2), \text{ Induct } \supset, \text{ P } ]$$

$$2) \frac{1}{1+a} < 1, \supset, (1+a)^m > 1+ma$$

$$[ \text{Hp, } m=2 \supset, 1+a^2 = 1+2a+a^2 > 1+2a \quad (1)$$

$$\text{Hp, } (1+a)^m > 1+ma \supset,$$

$$1+a^{m+1} > (1+ma)(1+a) > 1+(m+1)a+ma^2 > 1+(m+1)a \quad (2)$$

$$(1 \leq 2), \text{ Induct } \supset, \text{ P } ]$$

Ex.: §9 P.9 Dem.

$$3) a, b \in R, a < b, m \in N_1, \supset, \exists R^+, x \exists a < x^m < b$$

$$4) a, b \in 1+R, \supset, \exists N^+, c \exists [a \leq b < a^{c+1}]$$

\* 30.0  $a \in R, m \in N_1, \supset, a^m = /a$

Df

$$a, b \in R, m, n \in N, \supset, 1) a^m \in R$$

$$2) a^m a^n = a^{m+n}$$

$$3) (ab)^m = a^m b^m \quad 4) (a^m)^n = a^{m \cdot n}$$

$$5) a^{-m} = /a^m$$

$$6) a / a^m = a^{m-1}$$

} CHUQUET a.1484 fol.87: «qui partit .52.3 par .8.5 Il treuve ala part

$$9.3.m \times [ \text{Version: } 172x^2 / 8x^3 = 9x^{-3} ] \}$$

\* 31-34.  $(r \mid n) \text{ P11-14}$

\* 35.  $a \in R \setminus 0, m \in N_1, \supset, \text{ P30.0}$

Df

$$a, b \in R \setminus 0, m, n \in N, \supset, \text{ P30.1-6}$$

## §31 ...

$$\begin{aligned}
 + \text{ n } \rightarrow 0 \quad a \in \mathbf{n} \cdot b \in a + N_0 \cdot \bigcup \cdot a \cdot b &= (a + N_0) \cdot (b + N_1) & \text{Df} \\
 + 1 \quad a \in \mathbf{n} \cdot b \in N_1 \cdot \bigcup \cdot a \cdot (a + b) &= a + (0 \cdot b) \cdot a \cdot a = aa
 \end{aligned}$$

*Note.*  $a \cdot b$ , qu'on peut lire « de  $a$  à  $b$  », désigne l'ensemble des nombres  $a, a+1$ , etc.,  $b$ . Ex.: §Num P9, §Σ P1, ...

$$\begin{aligned}
 + 2 \quad a, b \in \mathbf{n} \cdot c \in a + N_0 \cdot d \in b + N_0 \cdot \bigcup \cdot (a \cdot c) + (b \cdot d) &= (a + b) \cdot (c + d) \\
 + 3 \quad a, b \in \mathbf{n} \cdot c \in b + N_0 \cdot \bigcup \cdot a + (b \cdot c) &= (a + b) \cdot (a + c) \quad \text{Distrib}(+, \cdot) \\
 + 4 \quad m \in N_1 \cdot \bigcup \cdot N_0 &= m N_0 + 0 \cdot (m - 1) \quad n = mn + 0 \cdot (m - 1) \\
 + 5 \quad a \in N_1 \cdot \bigcup \cdot \exists N_1 \cap \exists x [x + 0 \cdot a \supset N_1 \cdot N_1] (1 + N_1)
 \end{aligned}$$

Continuation: §Σ, §Π.

## §32 Num infn

$$\text{f rep } \rightarrow 0 \quad a, b \in \text{Cls} \cdot \bigcup \cdot \text{Num} a = \text{Num} b \quad \text{.} \quad \exists (b \text{ f rep}) & \text{Df}$$

« Num  $a$  » signifie « le nombre (numerus) des  $a$  ».

On l'appelle aussi « puissance (Mächtigkeit) de  $a$  », notamment si la classe  $a$  est infinie. Sur les différentes notations voir les F1895...

La définition  $\rightarrow 0$  est exprimée par les seuls signes de logique. On peut commencer ici l'Arithmétique: nous définirons directement les signes  $>$   $0 \cdot N_0 + \cdot \cdot \cdot \mathbb{N}$ , sans passer par les idées primitives du §20.

La P0 définit l'égalité « Num  $a$  = Num  $b$  », qui subsiste si l'on peut établir une correspondance réciproque entre  $a$  et  $b$ .

Nous n'écrivons pas une égalité de la forme

Num  $a$  = (expression composée par les symboles précédents).

La P0 est une Df par abstraction de Num  $a$ .

Etant donnée une classe  $a$ , on peut considérer la classe de classes:

$$\text{Cls} \cap \text{Cls} [\text{g } a \text{ f rep}];$$

L'égalité de ces Cls de Cls, calculées sur les classes  $a$  et  $b$  importe l'égalité Num  $a$  = Num  $b$ ; mais on ne peut pas identifier Num  $a$  avec la Cls de Cls considérée, car ces objets ont des propriétés différentes.

Num  $\cdot$  Cls signifie « le nombre d'une classe ». Ces nombres coïncident avec les  $N_0$  pour les classes finies: G. Cantor les appelle « nombres cardinaux ». Dans F1895 on a introduit le symbole « Ne » pour les représenter.



$$< \cdot 1 \quad (x, y \in \text{Num}(\text{Cls}), \cdot) \therefore \quad (x \leq y) :=$$
$$a, b \in \text{Cls} \text{ , Num } a \equiv c \text{ , Num } b \equiv g \text{ , } \supset_{a,b} \exists x(bfa \text{ sim } \text{ Df}$$
$$(11) \quad \text{Hp}1 \rightarrow; \quad x' \leq y \quad , \quad x' \leq y \quad , \quad x' = y \quad \text{Def}$$
$$\cdot 12 \quad a, b \in \text{Cls} \rightarrow \text{Num } a \leq \text{Num } b \equiv \exists c(bfa \text{ sim } c)$$
$$13 \quad \text{if } \text{Cls}'b \wedge \text{Num} = \text{Num} \text{ then } \text{Num} := \text{Num} + 1$$

14  $\vdash (a \supset b) \supset (\text{Num } a \leq \text{Num } b)$

$$(15) \quad x, y, z \in \text{NumCls} : x \leq y, y \leq z \Rightarrow x \leq z$$
$$0 \rightarrow \mathcal{O}_X(-2) \rightarrow \mathcal{O}_X(-1) \rightarrow \mathcal{O}_X \rightarrow 0 = \text{Num } \Lambda \quad \text{Def.}$$

21  $u \in \text{Cls}$ ,  $\sup \text{Num} u = 0$ ,  $\text{Def } u$  Dfp

$$22 \quad \mu \in \text{NumCls} \rightarrow \bigcup_{0 \leq i} \mu$$
$$23 \quad 1 = \text{Num}^*(\text{Cls} \cap \text{Abs}(\text{Set} : x, y \text{Set}, \bigcup_{x, y, x=y})) \quad \text{Df}$$

24  $a \in \text{Cls}$  .  $\supset$  .  $\text{Num } a = 1 \quad \text{.} \equiv \quad \exists x : x, y \in a \quad . \supset_{x, y} . x = y$

$$\inf_{\mathcal{A}} \|\cdot\|_2 = \inf_{\mathcal{A}} \|\cdot\|_1 =$$
$$\text{Num}^*(\text{Cls}^* a_3[\exists \text{Cls}^* a_3(u \supset a), u = a, \text{Num}^* u = \text{Num}^* a]) \} \quad \text{Df}$$

•31  $u\mathcal{E}$  Cls . $\cap$ :

$$\text{Num } a \in \text{Inf} \implies \mathbb{E} \quad \gg \quad \gg \quad \gg \quad \gg \quad \gg$$

« infn » = un infini . Ces infinis ne sont pas tous égaux ; ils forment une Cls. Le signe  $\infty$  du §1 représente un individu.

$$N_0 \quad \cdot 4 \quad N_p = (\text{Num.Cls}) \cdot \inf \quad \text{Df}$$

•41  $a \in \text{Cls} \rightarrow \sup. \text{Num } a \in N_0 \vee \text{inf}$

$$42 \quad \text{Num } N_1 = \text{Num } N_0 \quad [+ \varepsilon (N_0, N_1) \text{rep}]$$

•43 Num  $N_0 \in \text{infm}$

La condition  $\text{Num} \alpha = \text{Num } N_\alpha$  est exprimée par plusieurs A. sous les formes : l'ensemble  $\alpha$  est dénombrable ou il a la première puissance .

$$.44 \quad r \in \text{NumCls} \wedge j \in X_0 \wedge r \leq j \rightarrow j \in X_0$$
$$r \leq \text{Num } N_0, r \in \text{intn } \mathcal{D}, r = \text{Num } N_0$$
$$46 \quad \text{Num } X_0 = \text{Num } n = \text{Num}(X_0 : X_0) = \text{Num } R = \text{Num } r$$
$$\cdot 47 \quad \text{Num (Cls' } N_0) \geq \text{Num } N_0$$
$$48 \quad \text{Num}(\text{Cls } N_0) = \text{Num}(N_0 \mathbf{F} N_0)$$
$$+ \quad \exists x, y \in \text{NumCls} . \bigcup_{\text{Num} a = x, a \wedge b = y} (x + y = 1 \wedge \exists [a, b \in \text{Cls} . \text{Num} a = x, \text{Num} b = y, a \wedge b = \bigwedge_{a, b} . \exists \text{Num}(a \wedge b)]) \quad \text{Df}$$

•S1  $a, b \in \text{Cls}$ ,  $a \wedge b = \Lambda$ .  $\supset$ .  $\text{Num } a \cup b = \text{Num } a + \text{Num } b$

$$32 \quad \triangleright \quad \text{Num } a \cdot b + \text{Num } a \wedge b = \text{Num } a + \text{Num } b$$
$$\text{Num}(a \cup b) = \text{Num}(a) + \text{Num}(b - a)$$

·34  $x, y, z \in \text{Num.Cls.} \Rightarrow x+y = y+x \quad , \quad x+(y+z) = (x+y)+z$   
 $\quad , \quad 0+x = x \quad , \quad x \leq x+y$

- 55  $x \in N_0 . \supset . x + \text{Num } N_0 = \text{Num } N_0$   
 ·56  $\text{Num } N_0 + \text{Num } N_0 = \text{Num } N_0$   
 × ·6  $x, y \in \text{Num}^* \text{Cls} . \supset . x \times y = 1 \text{ } \exists \exists [ a, b \in \text{Cls} . \text{Num } a = x .$   
 $\text{Num } b = y . \supset a, b . z = \text{Num}(a \times b) ]$  Df  
 ·61  $a, b \in \text{Cls} . \supset . \text{Num}(a \times b) = \text{Num } a \times \text{Num } b$   
 ·62  $x, y, z \in \text{Num}^* \text{Cls} . \supset . xy = yx . x(yz) = (xy)z .$   
 $x(y+z) = xy + xz$   
 ·63  $x \in N_0 . \supset . x \times \text{Num } N_0 = \text{Num } N_0$   
 ·64  $\text{Num } N_0 \times \text{Num } N_0 = \text{Num } N_0$   
 † ·7  $x, y \in \text{Num}^* \text{Cls} . \supset . x \uparrow y = 1 \text{ } \exists \exists [ a, b \in \text{Cls} . \text{Num } a = x .$   
 $\text{Num } b = y . \supset a, b . z = \text{Num}(a \uparrow b) ]$  Df  
 ·71  $a, b \in \text{Cls} . \supset . \text{Num}(a \uparrow b) = \text{Num } a \uparrow \text{Num } b$   
 ·72  $a \in \text{Cls} . \supset . \text{Num}(\text{Cls}'a) = 2 \uparrow \text{Num } a$   
 ·73  $2 \uparrow \text{Num } N_0 = \text{Num } N_0 \uparrow \text{Num } N_0 > \text{Num } N_0$   
 ·8  $m \in N_1 . \supset : \text{Num } a = m . \equiv . \mathfrak{A} (a \uparrow 1 \cdots m) \text{rep}$  Df  
 ·81  $m \in N_1 . \supset . \text{Num } 1 \cdots m = m$   
 ·82  $m, n \in N_1 . \supset . \text{Num}(1 \cdots m \text{ F } 1 \cdots n) = m^n$   
 ·83  $m \in N_1 . \supset . \text{Num}(N_0 \text{ F } 1 \cdots m) = \text{Num } N_0$   
 ·84  $\text{Num}[(N_0 \text{ F } 0 \cdots n) \uparrow \mu \text{ } N_0] = \text{Num } N_0$

{G. CANTOR, *Ein Beitrag zur Mannigfaltigkeitslehre*, JfM. a.1877}

La bibliographie de ce sujet, très vaste, due à M. Vivanti, est citée dans § 8. La réduction de cette théorie en symboles est encore assez incomplète.

Continuation : §§ 1. §!4. §Np 7. 12·7 §Φ §Q 70. §δ 2.

§33 Σ = (somme)

- + ... \* 1.0  $m \in N_0, f \in \text{rf } 1^{...}(m+1) \rightarrow$   
 $\Sigma(f, 0^{...}0) = f0 \quad \Sigma(f, 0^{...}(m+1)) = \Sigma(f, 0^{...}m) + f(m+1) \quad \text{Df}$   
 1  $m \in N, n \in m + N_0, f \in \text{rf } m^{...}n \rightarrow \Sigma(f, m^{...}n) =$   
 $f m + f(m+1) + \dots + f n = \Sigma[f(m+r) | r, 0^{...}(n-m)] \quad \text{Df}$   
 2  $\text{Hp } 1 \rightarrow \Sigma(f, m^{...}n) \in \mathbb{R}$   
 3  $\text{Hp } 1, g \in [(m^{...}n) f (m^{...}n)]_{\text{rep}} \rightarrow \Sigma(fg, m^{...}n) = \Sigma(f, m^{...}n)$   
 4  $m, n, p \in N, m < n < p, f \in \text{rf } (m^{...}p) \rightarrow$   
 $\Sigma(f, m^{...}p) = \Sigma(f, m^{...}n) + \Sigma[f.(n+1)^{...}p]$   
 5  $m \in N_0, f, g \in \text{rf } 0^{...}m \rightarrow$   
 $\Sigma[(fr+gr) | r, 0^{...}m] = \Sigma(f, 0^{...}m) + \Sigma(g, 0^{...}m)$   
 6  $m, n \in N_1, v \in \text{rf}(1^{...}m : 1^{...}n) \rightarrow$   
 $\Sigma \{ \Sigma[v(r,s) | r, 1^{...}m] | s, 1^{...}n \} = \Sigma \{ \Sigma[v(r,s) | s, 1^{...}n] | r, 1^{...}m \}$

$\Sigma f, u$  indique la somme des valeurs de la fonction  $f$ , lorsque la variable prend les valeurs appartenant à une classe  $u$ .

La P.0 définit par induction  $\Sigma f, 0^{...}m$ . La P.1 réduit au cas précédent  $\Sigma f, m^{...}n$ . Elle introduit aussi la notation  $f m + \dots + f n$ , commode dans quelques cas, mais insuffisante en général. Car par ex.  $1+2+\dots+1$  indique la somme d'une suite, dont on connaît le premier, le second, et le dernier, sans connaître les autres termes, ni leur nombre.

Les P.21 définissent  $\Sigma f, u$  dans d'autres cas.

On rencontre le signe Σ dans Lagrange a.1772 t.3 p.451.

Dans la notation  $\sum_{m=1}^n f_r$  Cauchy, le signe Σ porte trois indices  $m, n, r$ .

3. Une somme est indépendante de l'ordre de ses termes.

On peut indiquer le couple formé par une fonction  $f$  et la classe des valeurs de la variable par une lettre seule, qui représente une fonction  $F$ .  
 Ex. P11.4 20 21 22.

- × \* 2.  $m \in N_1, f \in \text{rf } 0^{...}m, a \in \mathbb{R} \rightarrow$   
 2  $a \times \Sigma(f, 1^{...}m) = \Sigma[a(fr) | r, 1^{...}m]$   
 3  $m, n \in N_1, f \in \text{rf } 0^{...}m, g \in \text{rf } 0^{...}n \rightarrow$   
 $\Sigma(f, 0^{...}m) \times \Sigma(g, 0^{...}n) = \Sigma \{ \Sigma[(fr \times gs) | s, 0^{...}n] | r, 0^{...}m \}$   
 4  $a \times m = \Sigma r (ar F 1^{...}m) \quad \text{Dfp}$

/ \* 3.  $m \in N_1 \cdot \supset$

$$\cdot 1 \quad 1+2+3+\dots+m = \Sigma(\text{idem}, 1 \dots m) = m(m+1)/2$$

$$\cdot 2 \quad \Sigma[(2r+1)|r, 0 \dots m] = 1+3+5+\dots+(2m+1) = (m+1)^2$$

{ 1-2 PYTHAGORAS; Voir THEON SMYRNAEUS p. 27, 28 }

$$\cdot 3 \quad \Sigma[r(r+1)|r, 1 \dots m] = m(m+1)(m+2)/3 \quad \{ \text{ARYABHATA P21} \}$$

$$\cdot 4 \quad \Sigma[r(r+1)(r+2)|r, 1 \dots m] = m(m+1)(m+2)(m+3)/4$$

{ ALQÂCHÂNÎ a.1589 p.247 } Continuation: §II 7-1

↑ \* 4.  $m, n \in N_1 \cdot s_m = \Sigma(r^m|r, 1 \dots n) \cdot \supset$

$$\cdot 1 \quad s_1 = n(n+1)/2 \quad [ = P3-1 ]$$

$$s_2 = n(n+1)(2n+1)/6$$

{ ARCHIMEDES *Περί Ήλζων* P10; ARYABHATA P22:

« Le dernier terme, celui-ci plus 1, celui-ci plus le nombre des termes; du produit de ces trois nombres prenez le sixième, c'est le volume de la pile des carrés. » }

$$s_3 = [n(n+1)/2]^2 = s_1^2$$

{ NICOMACHUS a.50 *Arith.* II 20. ARYABHATA P22 }

$$s_4 = n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)/30$$

{ ALQÂCHÂNÎ p. 247 }

{ FERMAT a.1636 t.2 p.69 :

« Exponentur quotlibet numeri in progressionē naturali ab unitate; si a quadruplo ultimi, binario aucto et in quadratum trianguli numerorum ducto, demas summam quadratorum a singulis, fiet quintuplum quadrato-quadratorum a singulis. » }

$$s_5 = n^2(n+1)^2(2n^2+2n-1)/12$$

$$s_6 = n(n+1)(2n+1)[3n^2(n+1)^2-(3n^2+3n-1)]/42$$

$$s_7 = n^2(n+1)^2[3n^2(n+1)^2-2(2n^2+2n-1)]/24$$

{ WALLIS a.1655 t.1 p.381 }

$$s_8 = n(n+1)(2n+1)[5n^3(n+1)^3-10n^2(n+1)^2+3(3n^2+3n-1)]/90$$

$$s_9 = n^2(n+1)^2[2n^3(n+1)^3-5n^2(n+1)^2+3(2n^2+2n-1)]/20$$

$$s_{10} = n(n+1)(2n+1)[3n^4(n+1)^4-10n^3(n+1)^3+17n^2(n+1)^2-5(3n^2+3n-1)]/66$$

$$s_{11} = n^2(n+1)^2[2n^4(n+1)^4-8n^3(n+1)^3+17n^2(n+1)^2-10(2n^2+2n-1)]/24$$

{ Jac. BERNOULLI a.1713 p.97 } Continuation: §C 7-3 §B 3

$$\cdot 2 \quad 5s_4 = s_2(6s_1-1) \quad 3s_5 = 4s_1^3-s_3 \quad 7s_6 = 12s_2s_3-5s_4$$

$s_7 = 2(s_3)^2-s_5$  } JACOBI, cfr. *Briefwechsel zwischen Gauss und Schuhmacher* t.5 p.299 a.1863 }

$$12s_2^{15} - 16s_6 - 5s_4 + s_2$$

{ AMIGUES AnnN. s.2 t.10; IdM. a.1894 p.29-136 }

$$2s_7 = 4s_3^2 - 3s_2^2 + s_1^2 \quad 2s_6 = 3s_2^2 - s_1^2 \quad \{ \text{LUCAS a.1891 p.249} \}$$

$$\begin{aligned} * \quad 5.1 \quad m \in N_1, \supset. \Sigma(2r+1)^2 | r, 0 \dots m ] &= (m+1)(2m+1)(2m+3) \\ \Sigma(r+1)^3 | r, 0 \dots m ] &= (m+1)^2(2m^2+4m+1) \\ \{ \text{IBN ALBANNA a.1275} \} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} * \quad 2 \quad x \in N_0^3, \supset. \exists (N_0^3 F 1 \dots 9) \wedge f \exists x = \Sigma f \quad \{ \text{WARING a.1782} \\ \text{p.349; JACOBI a.1851; Dm: OLTRAMARE a.1895 IdM. p.31} \} \end{aligned}$$

$$* \quad 6. \quad a, b \in r, m \in N_1, \supset.$$

$$1 \quad \Sigma(a^{m-r}b^r | r, 0 \dots m) = (b^{m+1} - a^{m+1}) / (b - a)$$

{ AHMÈS N.79:  $7+49+343+2401+16807 = 7 \cdot 2801 = 19607$

*Note.* Les nombres 7, 49, ... sont les puissances de 7; on ne voit pas d'où l'A. a tiré le nombre 2801; si, selon Eisenlohr, il provient de la division  $(7^5-1)/(7-1)$ , alors on a la formule précédente. }

{ EUCLIDES IX P35 }

$$m \in N_1, x, y, a \in r f 1 \dots m, \supset.$$

$$\begin{aligned} * \quad 2 \quad \Sigma(x^2, 0 \dots m) \times \Sigma(y^2, 0 \dots m) &= [\Sigma(xy, 0 \dots m)]^2 = \\ &\Sigma \{ \Sigma[(x_r y_s - x_s y_r)^2 | s, (r+1) \dots m] | r, 0 \dots (m-1) \} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} * \quad 3 \quad \Sigma(ax^2, 0 \dots m) \times \Sigma(ay^2, 0 \dots m) &= [\Sigma(axy, 0 \dots m)]^2 = \\ &\Sigma \{ \Sigma[a_r a_s (x_r y_s - x_s y_r)^2 | s, (r+1) \dots m] | r, 0 \dots (m-1) \} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} * \quad 7.1 \quad n \in N_1, \supset. \Sigma[(-1)^r | r, 1 \dots 2n] &= \Sigma[(-1)^r | r, 1 \dots 2n] \\ \{ \text{CATALAN IdM. a.1875 s.3 t.1 p.240} \} \end{aligned}$$

$$* \quad 8.1$$

$$n \in N_1, a \in n f 1 \dots n, \supset. r \wedge \exists [r^n + \Sigma(a_r x^{n-r} | r, 1 \dots n) = 0] \supset n$$

$$* \quad 10 \quad n \in N_1, a \in (0 \dots 9) f (0 \dots n), \supset.$$

$$a_n \dots a_2 a_1 a_0 = a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + \dots + a_n X^n = \Sigma(a_r X^r | r, 0 \dots n) \quad \text{Df}$$

*Note sur les systèmes de numération.*

Cette P donne la définition symbolique de notre système de numération.

Le mot « chiffre » correspond au symbole  $0 \dots 9$ . Si  $a$  et  $b$  sont des chiffres,  $ab$  désigne  $aX+b$ . Mais par la § 149,  $ab$  a aussi la valeur  $a \cdot b$ . Cette représentation par le même signe de deux objets différents, commune à tous les livres, n'a pas apporté des sérieuses difficultés; et en apporte moins dans notre travail, où figurent rarement les nombres écrits dans le système décimal.

Les anciens Egyptiens avaient des signes pour indiquer les unités des différents ordres. Un nombre est alors exprimé comme somme de ces unités (M. Cantor, p. 44). Si l'on remplace les signes qui représentent 10, 100, 1000... par X, C, M, le nombre 1898 sera représenté à la façon des égyptiens par

$$\begin{array}{r} \text{CCCC XXXX III} \\ \text{M CCCC XXXXX III} \end{array}$$

Le même système fut en usage chez les Babyloniens, les Phéniciens, etc.

Les Etrusques et les Romains ont représenté 1 par I, 10 par X, 100 1000 par des signes, qu'on a dans la suite déformés en C et M. Ces signes sont, selon M. Lindemann, d'origine égyptienne. Ils ont introduit des signes, moitiés des précédents, pour représenter

$$5 = V, \quad 50 = L, \quad 500 = D.$$

Les Grecs ont attribué aux lettres de leur alphabet une valeur numérique:

$$\alpha = 1, \beta = 2, \dots, \theta = 9, \iota = 10$$

$$\kappa = 20, \lambda = 30, \dots, \eta = 90, \varrho = 100, \sigma = 200, \dots, \alpha = 1000, \dots$$

P. ex.  $\alpha\omega\omega\eta' = 1898$ .

Le même système de numération est encore en usage chez les Arabes, concouramment aux chiffres indiens; ils ont remplacé les lettres grecques, de  $\alpha$  à  $\pi$ , par les lettres arabes correspondantes.

Dans ces systèmes un nombre est exprimé par la somme des nombres représentés par les signes simples.

Les anciens peuples ont aussi fait usage de chiffres négatifs, indiqués par la position à droite du nombre supérieur chez les Etrusques, à gauche chez les Romains, par un signe spécial chez les Babyloniens.

Les Chinois et les Japonais se servent de signes simples, ayant la valeur de 1, 2, ..., 9, X, C, M, par lesquels nous les remplaçons. Les signes pour représenter 1, 2, 3 sont 1, 2, 3 barres, comme chez les Egyptiens et les Romains. Le nombre 1898 est exprimé, sauf la forme des signes, et en substituant les lignes aux colonnes, par 1M8C9X8; c'est-à-dire comme somme et produit des signes simples.

Dans tous ces systèmes il n'y a pas de 0, ni de valeur de position des chiffres. L'introduction du 0, l'indication des puissances de la base par la position des chiffres, et la suppression des signes simples pour les représenter s'est opérée chez les Indiens vers l'a. + 400 (M. Cantor, p. 569), d'où elle s'est répandue chez les Arabes vers l'a. + 800, et en Europe vers l'a. 1200.

La valeur de position est la même, soit chez les Hindous et les Européens, dont l'écriture est dirigée de gauche à droite, soit chez les Arabes, dont l'écriture est dirigée en sens contraire.

Dans l'A. chinois, cité à la P2 du §N, il y a le 0, et la valeur de position des chiffres, qui ont à peu près la forme

$$\begin{array}{cccccccccc} \text{—} & \text{I} & \text{II} & \text{III} & \text{III} & \text{—} & \text{I} & \text{II} & \text{III} & \text{III} \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9. \end{array}$$

Cette forme, semblable à la notation des Romains, est la représentation graphique du « Soan pan » ou abaque des Chinois.

La division des nombres en tranches de trois chiffres nous vient des Romains, qui comptaient par milliers. Les Grecs comptaient par myriades, ce qui correspond à lire les nombres par tranches de 4 chiffres. Ainsi opère Archimède, dans l' *Arenarius* ( *Ἀρεναρίως* ) pour lire des nombres jusqu'à 61 chiffres.

La numération parlée appartient au domaine de la philologie.

Ariabhata a attribué une valeur numérique aux sons de la langue sanscrite, afin d'apprendre par cœur des tables de trigonométrie et d'astronomie. (Cfr. RODET, *Journal Asiatique*, a. 1880.) On a proposé des systèmes analogues chez nous. Voir F1898 P110.

Sans changer la base du système de numération, Cauchy, par l'introduction des chiffres négatifs, a réduit de moitié le nombre des chiffres (*Œuvres* s.1 t.5 p.431).

Pour réduire les conventions sur les chiffres au plus petit nombre possible, il faut choisir pour base de numération le nombre 2. Ce système de numération a des propriétés curieuses.

Deux signes suffisent pour indiquer les nombres dans la base 2; p. ex. un signe visible, et l'absence du signe, pourvu que la place soit suffisamment indiquée. P. ex. si l'on adopte les signes  $\cdot$  et  $\cdot$  pour indiquer 0 et 1, ou le signe  $\cdot$  pour indiquer une place et  $\cdot$  pour indiquer l'unité, les premiers nombres seront indiqués par  $\cdot$   $\cdot$   $\cdot$   $\cdot$   $\cdot$   $\cdot$   $\cdot$   $\cdot$  etc.

L'objection que dans une base petite, augmente le nombre des chiffres qu'on doit écrire pour représenter les différents nombres, n'est qu'une apparence. Car un nombre écrit dans la base 2 est aussi écrit dans les bases 4, 8, 16,.... si on le décompose en tranches de 2, 3, 4,.... chiffres.

Groupons 8 chiffres à la fois, et disposons-les circulairement, dans l'ordre

5 4 3  
6 \* 2      on a :  
7 8 1       $\surd = 1$      $\cdot = 2$      $\cdot = 4$      $\cdot = 24$      $* = 255$      $\cdot = 1900$

Pour lire rapidement les nombres ainsi exprimés, on peut faire correspondre aux 256 chiffres de la base 2<sup>8</sup> autant de syllabes faciles à prononcer.

P. ex. donnons aux signes :

$\cdot$   $\cdot$   $\cdot$   $\cdot$   $\cdot$   $\cdot$   $\cdot$   $\cdot$      $\cdot$   $\cdot$   $\cdot$   $\cdot$   $\cdot$   $\cdot$   $\cdot$   $\cdot$      $\cdot$   $\cdot$   $\cdot$   $\cdot$   $\cdot$   $\cdot$   $\cdot$   $\cdot$      $\cdot$   $\cdot$   $\cdot$   $\cdot$   $\cdot$   $\cdot$   $\cdot$   $\cdot$   
les valeurs  $b$        $d$        $g$        $f$        $p$        $t$        $k$        $i$   
et à       $\cdot$   $\cdot$   $\cdot$   $\cdot$   $\cdot$   $\cdot$   $\cdot$   $\cdot$      $\cdot$   $\cdot$   $\cdot$   $\cdot$   $\cdot$   $\cdot$   $\cdot$   $\cdot$      $\cdot$   $\cdot$   $\cdot$   $\cdot$   $\cdot$   $\cdot$   $\cdot$   $\cdot$   
les valeurs       $a$        $u$        $o$        $l$        $m$        $s$ ,

et à leurs groupements la syllabe qui résulte de leur suite, en convenant de prononcer  $e$  lorsqu'il n'y a pas de voyelle.

On peut même faire des conventions, par lesquelles toute syllabe soit représentée par un chiffre : on rencontre ainsi un système d'écriture que nous avons développé dans :

*La numerazione binaria applicata alla stenografia*, Torino A. a. 1898.

Les calculs dans la base 2 s'effectuent rapidement si l'on représente les unités des différents ordres par des dames sur une ligne du damier. Ex :

$$\boxed{\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline o & o & & & o & o \\ \hline \end{array}} = !!..!! = 203 = \text{pas.}$$

La table de multiplication se réduit à  $1 \times 1 = 1$ . On peut adopter les bandes de papier.

La division s'exécute sans les tâtonnements nécessaires dans notre système. (Leibniz, *MathS.* t.7 p.223-243).

Legendre a.1797 p.229 adopte la numération binaire pour calculer des grandes puissances.

Voir aussi E. Lucas, *Récréations mathématiques*, a.1891 t.1 p.145.

$$\begin{aligned} * \quad 11. \quad m, n \in \mathbb{N}_1, a \in (0 \cdots 9) f(-m \cdots n) \quad \supset \\ a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0 \cdot a_{-1} a_{-2} \dots a_{-m} = \Sigma(a_r X^r | r, -m \cdots n) \quad \text{Df} \end{aligned}$$

Le développement d'un nombre rationnel selon les puissances positives et négatives de la base 60 se rencontre chez les astronomes babyloniens et les géomètres grecs (voir §7P1.3); elle est encore en usage dans la division des angles et du temps.

Regiomontanus (a.1436-1476) en supposant le rayon du cercle trigonométrique  $= 10^7$ , a supprimé tout signe pour indiquer la partie décimale d'une fraction.

François Viète (a.1579) dans son *Canon Mathematicus* indique la partie décimale par des chiffres plus petits et soulignés. Il écrit 314,159,265,35 ce que nous écrivons 314 159.265 35. Il a aussi exposé les avantages des fractions décimales (*universalium inspectionum* etc. p.17).

Simon Stevin dans sa *Disme* (a.1585), écrit (p.208)

941  $\textcircled{0}$  3  $\textcircled{1}$  0  $\textcircled{2}$  4  $\textcircled{3}$  ce que nous écrivons 941.304.

Joost Bürgi (a.1552-1632, selon Keppler, a séparé la partie entière de la partie décimale par un angle droit (voir Mercator §log 1.3), ou par un point.

Le point en haut est d'usage commun dans les traités anglais contemporains. Selon cette notation, on supprime la partie entière, lorsqu'elle est nulle.

$$\begin{aligned} > \uparrow * \quad 20. \quad m, n \in \mathbb{N}_1, x, y \in \mathbb{R} \text{ F } 1 \cdots n, a, b \in \mathbb{R} \text{ F } 1 \cdots n \quad \supset \\ \cdot 1 \quad (\Sigma x^2)(\Sigma y^2) &\geq (\Sigma xy)^2 \quad [P6.2 \supset P] \\ \cdot 2 \quad n(\Sigma x^2) &\leq (\Sigma x)^2 \quad [P.1, y=1 \supset P] \quad \{ \text{CAUCHY a.1821 p.372 } \} \\ \cdot 3 \quad (\Sigma ax^2)(\Sigma ay^2) &\geq (\Sigma axy)^2 \quad [P6.3 \supset P] \\ \cdot 4 \quad (\Sigma a)(\Sigma ax^2) &\leq (\Sigma ax)^2 \quad [ (1 | y)P.3 \supset P ] \\ \cdot 5 \quad n^{m-1}(\Sigma a^m) &\leq (\Sigma a)^m \end{aligned}$$



Num \* 21.1.  $u \in \text{Cls}, \text{Num } u \in N_1, f \in \text{rf } u, \supset.$

$\Sigma(f, u) = \lambda x \exists [g \in (u \cap 1 \dots \text{Num } u \text{ rep.}) \supset g, x = \Sigma(fg, 1 \dots \text{Num } u)]$  Df

2.  $u \in \text{Cls}, f \in \text{rf } u, \text{Num}[u \wedge x \exists (f, x = 0)] \in N_1, \supset.$

$\Sigma(f, u) = \Sigma[f, u \wedge x \exists (f, x = 0)]$  Df

3.  $u \in \text{Cls}^r, \text{Num } u \in N_1, \supset.$

$\Sigma u = \lambda x \exists [f \in (u \cap 1 \dots \text{Num } u \text{ rep.}) \supset f, x = \Sigma f, 1 \dots \text{Num } u)]$  Df

4. Hp 3.  $\supset. \Sigma u = \Sigma \text{idem}, u$  Dfp

5.  $u \in \text{Cls}^r N_0, \text{Num } u \in N_1, f \in (N_0 \cap u) \text{sim.} \supset. \Sigma(f, u) = \Sigma(f, u)$

La P.1 est la Df de  $\Sigma f, u$ , si  $u$  est une classe finie. Cette somme est la valeur constante de  $\Sigma f, g, 1 \dots \text{Num } u$ , quel que soit l'ordre  $g$  des  $u$ .

Ex.: §! 6.5.8 §Φ.1 §Drm.0.

P.2. Si la classe  $u$  contient un nombre infini d'individus, mais si le nombre des individus de la classe  $u$ , auxquels correspond une valeur non nulle de  $f$ , est fini, alors  $\Sigma f, u$  indique la somme des valeurs de la fonction  $f$ , lorsque la variable prend dans la classe  $u$  les valeurs auxquelles correspond une valeur non nulle de  $f$ . Ex.: §E 2.2 §sup 2.0.

P.3. Soit  $u$  une classe de nombres, en nombre fini.  $\Sigma u$  indique leur somme. Ex.: P22, §! P7.3, §sup 2.5. Voir §lin 10.

\* 22.  $u \in 2N_0 + 1, \supset. \text{Num}(u, x, y, z) \exists (u, x, y, z \in 2N_0 + 1, w^2 + x^2 + y^2 + z^2 = 4u) = \Sigma(N_1 \cap u / N_1)$

{ JACOBI a.1834 t.6 p.245: "Sit  $n$  datus numerus quilibet impar positivus, sint porro  $w, x, y, z$  numeri impares positivi, numerus solutionum æquationis  $4n = ww + xx + yy + zz$

æquatur summae factorum ipsius  $n$ , > }

## §34 II

$\times \dots \ast \quad 1^{\circ} 0 \dots m \in N_0, f \in \text{r f } 0^{\dots}(m+1) \supset.$   
 $H(f, 0^{\dots} 0) = f \cdot 0, H(f, 0^{\dots}(m+1)) = H(f, 0^{\dots} m) \times f(m+1) \quad \text{Df}$   
 $H \mid \Sigma) \S \Sigma \text{ P1}$   
 $\cdot 7 \quad m \in N_0, f \in \text{r f } 0^{\dots} m \supset: H(f, 0^{\dots} m) = 0 \implies 0 \in f^{\circ} 0^{\dots} m$

$\uparrow \ast \quad 2^{\circ} 1 \quad \text{Hp } 1^{\circ} 0, n \in N_1 \supset. Hf \uparrow n, 1^{\dots} m) = [H(f, 1^{\dots} m)] \uparrow n$   
 $\cdot 2 \quad n \in N_1 + 1 \supset. H[(n+1)^{\dots} 2n] = H[(2x-1) \mid x, 1^{\dots} n] \times 2^x$

$\text{Num} \ast \quad 3^{\circ} 1 \quad a \in N_1 \supset. H(N_1 \wedge a/N_1)^2 = a \uparrow \text{Num}(N_1 \wedge a/N_1)$   
 $\cdot 2 \quad m, n \in N_1 \supset. \text{Num}(1^{\dots} m \text{ F } 1^{\dots} n)_{\text{sim}} = H[m - 0^{\dots}(n-1)]$   
 Les  $(1^{\dots} m \text{ F } 1^{\dots} n)_{\text{sim}}$  s'appellent les "arrangements simples  $n$  à  $n$  des nombres  $1^{\dots} m$ ".

$\Sigma \ast \quad 4^{\circ} 1 \quad m, n \in N_1 \supset.$   
 $(n+2) \Sigma \{ [H(r + 0^{\dots} n) \mid r, 1^{\dots} m] = H[m + 0^{\dots}(n+1)]$   
 $\} \text{FERMAT t.1 p.341:}$

« In progressionē naturali, quae ab unitate sumit exordium, quilibet numerus  $[m]$  in proximē majorem  $[...m+1]$  facit duplum sui trianguli  $[=2 \cdot (1+2+...+m)]$ ; in triangulum proximē majoris, facit triplum suae pyramidis; in pyramidem proximē majoris facit quadruplum sui triangulo-trianguli; et sic uniformi et generali in infinitum methodo. » {

$\cdot 2 \quad n \in (\text{r} \neq 1) \text{ f } 1^{\dots} n \supset.$   
 $1 = \Sigma \{ u_s / H[(1+u_s) \mid s, 1^{\dots} r] \mid r, 1^{\dots} n \} + / [H(1+u_s) \mid s, 1^{\dots} n]$   
 $\} \text{NICOLE ParisM. a.1727 p.257 } \{$

$\ast \quad 10. \quad n \in N_1 + 1, x, y \in \text{R F } 1^{\dots} n, a \in N_1 \text{ F } 1^{\dots} n \supset.$

$\cdot 1 \quad (\Sigma x)^n \geq n^n Hx \quad \cdot 2 \quad \Sigma x^n \geq n Hx$   
 $\cdot 3 \quad (\Sigma ax \uparrow \Sigma a) \geq [(\Sigma a \uparrow \Sigma a) H(x \uparrow a)]$   
 $\cdot 4 \quad \Sigma ax^n \geq n Hx^n$   
 $\cdot 5 \quad (1+x_1)(1+x_2) \dots (1+x_n) > 1+x_1+x_2+\dots+x_n$   
 $\cdot 6 \quad x \in \text{R} \wedge (1-\text{R}) \text{ f } 1^{\dots} n \supset. (1-x_1)(1-x_2) \dots (1-x_n) > 1-x_1-x_2-\dots-x_n$

§35 ! = (factorielle) C = (combinaisons)

$$\begin{aligned} N_0 + \times * \quad & 1 \cdot 0 \quad 0! = 1 \quad : \quad a \in N_0 \quad \cdot \supset \cdot (a+1)! = a! \times (a+1) \quad \text{Df} \\ \cdot 01 \quad & a, b \in N_0 \quad \cdot \supset \cdot a+b! = a+(b!) \quad , \quad a-b! = a-(b!) \quad , \\ & a \times b! = a \times (b!) \quad , \quad a/b! = a/(b!) \quad \text{Df} \\ H \quad & \cdot 03 \quad m \in N_1 \quad \cdot \supset \cdot m! = H(1 \cdots m) \quad \text{Dfp} \end{aligned}$$

*Note.* Le signe ! a été introduit par Kramp, *Éléments d'Arithm.* a. 1808. Gauss a indiqué la même fonction par  $Hm$ ; les anglais écrivent  $\{m\}$ .

$$\cdot 1 \quad a, b \in N_1 \quad \cdot \supset \cdot H(a+1 \cdots b) \in N_1 \times b! \quad \} \text{B. PASCAL t.3 p.274:}$$

« Omnis productus a quotlibet numeris continuis est multiplex producti a totidem numeris continuis quorum primus est unitas. »

$$\cdot 11 \quad a, b \in N_1 \quad \cdot \supset \cdot (a+b)! \in N_1 \times (a! \times b!) \quad \{ = P \cdot 1 \}$$

$$\begin{aligned} * \quad & 2. \quad a \in \mathbb{R} \quad , \quad n \in N_1 \quad \cdot \supset \cdot \quad \cdot 0 \quad C(a, 0) = 1 \quad \text{Df} \\ \cdot 01 \quad & C(a, n) = H[a - 0 \cdots (n-1)] / n! \quad \text{Df} \\ \cdot 1 \quad & n \in N_0 \quad , \quad m \in n + N_0 \quad \cdot \supset \cdot C(m, n) = m! / [n! (m-n)!] \quad \text{Dfp} \end{aligned}$$

*Note.* La fonction  $C(m, n)$ , ou  $C_{m,n}$ , qu'on peut lire « nombre des combinaisons de  $m$  objets, pris  $n$  à  $n$  » (Pascal), se rencontre aussi sous les formes  $\left[ \frac{m}{n} \right]$  (Euler),  $\langle m \rangle_n$  (Cauchy),  $\binom{m}{n}$  (Raabe),  $m_n$ , etc.

$$\cdot 2 \quad C(-a, n) = (-1)^a C(a+n-1, n) \quad \} \text{EULER Petr.A. a.1784 p.86 \}$$

$$\begin{aligned} * \quad & 3. \quad m, n \in N_0 \quad \cdot \supset \cdot \quad \cdot 1 \quad C(m, 0) = 1 \quad , \quad C(m, 1) = m \quad , \quad C(m, m) = 1 \\ & C(0, n+1) = 0 \quad , \quad C(m, m+n+1) = 0 \end{aligned}$$

$$\cdot 2 \quad C(m+n, m) = C(m+n, n) \quad \} \text{PASCAL t.3 p.289:}$$

« I. Duo quilibet numeri aequè combinantur in eo quod amborum aggregatum est. »

$$\cdot 21 \quad C(m+1, n+1) = C(m, n+1) + C(m, n)$$

*Note.* Cette P. avec les  $C(m, 0) = 1$ ,  $C(0, m+1) = 0$ , permet de définir par *induction double*, la fonction  $C$ .

$$\begin{aligned} \cdot 3 \quad & C(m+n+1, n) = C(m+n, n) \times (m+n+1) / (n+1) \\ & C(m+n, n+1) = C(m+n, n) \times m / (n+1) \\ & C(m+n+1, n+1) = C(m+n, n) \times (m+n+1) / (n+1) \\ & \} \text{PASCAL t.3 p.289 \} \end{aligned}$$



- \*3  $(m+1)\Sigma(1\cdots n)^m =$   
 $(n+1)^{m+1} - 1 - \Sigma\{C(m+1, r) \times \Sigma(1\cdots n)^r \mid r, 0\cdots(m-1)\}$   
 $\{ - \Sigma\{C(m+1, r) \times \Sigma(1\cdots n)^r \mid r, 0\cdots(m-1)\} =$   
 $\Sigma\{C(m+1, r) s^r \mid r, 0\cdots(m-1)\} [s, 1\cdots n] =$   
 $\Sigma\{[1+s^{m+1}-m+1] s^m - s^m + 1\} [s, 1\cdots n] =$   
 $(n+1)^{m+1} - 1 - m+1 \Sigma(1\cdots n)^m \}$   
 $\}$  PASCAL a.1655 t.3 p.309 {
- \*4  $\Sigma\{[C(n, r)]^2 \mid r, 0\cdots n\} = C(2n, n) \}$  LAGRANGE a.1770 t.2 p.182:  
 $1+n^2+[n(n+1)/2]^2+\dots=[1+3+5+\dots+2n-1]^2=[1+2+3+\dots+n]^2$
- \*5  $\Sigma\{(-1)^r [C(2n, r)]^2 \mid r, 0\cdots 2n\} = C(2n, n) \}$  LUCAS a.1891 p.133{
- \*51  $\Sigma\{(-1)^r [C(2n, r)]^3 \mid r, 0\cdots 2n\} = (-1)^n (3n)! / (n!)^3$   
 $= (-1)^n C(3n, n) \times C(2n, n)$   
 $\}$  DIXON Mm. a.1890 t.20 p.79 {
- \*52  $a, n \in N_1, \bigcup_r \Sigma\{[C(n, r)]^{2r} \mid r, 0\cdots n\} \in (n+1) \times N_1$   
 $\}$  VIVANTI Zm. a.1888 t.33 p.358 {
- \*6  $(1+x+x^2)^n = \Sigma\{(x^{m-1}+x^{m-2}) \times \Sigma\{C(m, r+2s) \times C(r+2s, s)$   
 $\mid s, 0\cdots m\} \mid r, 1\cdots n\} + x^n \times \Sigma\{C(m, 2s) \times C(2s, s) \mid s, 0\cdots m\}$   
 $\}$  EULER a.1778 PetrNA. a.1794 t.12 p.47 {
- \*7  $n! = \Sigma\{(-1)^r C(n, r) (n-r)^n \mid r, 0\cdots n\}$   
 $\}$  EULER PetrNC. a.1768 t.13 p.28 {
- \*8  $\Sigma(1\cdots n) = \Sigma\{(-1)^r C(n, r) r \mid r, 1\cdots n\}$   
 $\}$  JOH. BERNOULLI a.1740 CORR. t.2 p.35 {
- \* 8.  $m, n \in N_1, a \in \mathbb{R} F 1\cdots m, \bigcup_r (\Sigma a)^n =$   
 $\Sigma\{[n! / H(n!, 1\cdots m)] \times H(a, [a_r, r, 1\cdots m]) \mid a, (N_0 F 1\cdots m) \cap \mathcal{B}(\Sigma a = n)\}$   
 $\}$  LEIBNIZ a.1678 ? : voir Mss. *Math.* III A 3 fol.16;  
*MathS.* t.3 p.175, 192; t.5 p.380; t.7 p.178 {
- $\}$  BERNOULLI Joh. a.1695, (LEIBNIZ *MathS.* t.3<sup>7</sup> p.181):
- Esto... polynomium quodecunque  $s+x+y+z$  etc. elevandum ad potentiam quaecunque  $r$ : Dico coefficientem termini  $s^a x^b y^c z^e$  etc. fore
- $$\frac{r!}{a! b! c! e!} \frac{r!}{1! 2! 3! \dots a!} \frac{r!}{1! 2! 3! \dots b!} \frac{r!}{1! 2! 3! \dots c!} \frac{r!}{1! 2! 3! \dots e!} \&$$
- \* 9-1  $m \in N_1, a \in \mathbb{R} F 1\cdots m, \bigcup_r$   
 $\Sigma\{(Hr) \times (\Sigma r \times a)^m \mid r, (a \cup r - 1) F 1\cdots m\} = 2^m \times m! \times Ha$   
 $\}$  GERGONNE Ann. a.1816-17 t.7 p.165 {
- \* 10-1  $m \in N_1, a \in \mathbb{R} F 1\cdots m, \bigcup_r$   
 $(1+a_1)(1+a_2)\dots(1+a_m) < 1 + (\Sigma a)/1! + (\Sigma a)^2/2! + \dots + (\Sigma a)^m/m!$   
 $\}$  PRINGSHEIM MA. a.1889 t.33 p.142 {

Continuation : §Np 9 §D 6-3-6 §§ 6-6-7 §e 5-21.

## §36 mod sgn

n \* 1.  $a \in N_1 \rightarrow$

$$\cdot 0 \text{ mod } (+a) = a \text{ , mod } (-a) = a \text{ , mod } 0 = 0$$

Df

Note. La fonction «moda» (module de  $a$ ) se rencontre sous la forme «mola» (moles  $a$ ) dans Leibniz, *MathS.* t.7. p.219 ;

sous la forme que nous adoptons dans Argand a.1814 *Ann. de Gergonne* t.5 p.208, et dans Cauchy, *Exercices* a.1829 t.4 p.47.

Le mot «mod» se rencontre déjà dans Gauss a.1801, pour les congruences. Il a d'autres significations dans la théorie des fonctions elliptiques. Par cette raison Weierstrass a.1856 t.1 p.302, a proposé de l'appeler «absolute Betrag», et a.1876 t.2 p.78 l'a indiqué par  $|a|$ . Cette notation est contraire aux conventions sur les fonctions, §f; le signe «mod» n'apporte pas ici des ambiguïtés.

$a, b \in \rightarrow$  1.  $\text{moda} = \text{mod} \text{ mod } (a = +x \vee a = -x)$  Dfp

$$\cdot 2 \text{ mod } a \in N_0$$

$$\cdot 3 \text{ mod } (-a) = \text{moda}$$

$$\cdot 4 \text{ mod}(a+b) \leq \text{mod}a + \text{mod}b$$

$$\times \cdot 5 \text{ mod}(a \times b) = (\text{mod}a) \times (\text{mod}b)$$

r \* 2. 0-3 = (R, R<sub>0</sub>, r) | (N<sub>1</sub>, N<sub>0</sub>, n) P1.0-3

$a, b \in \rightarrow$  6.  $a = 0 \rightarrow \text{mod}/a = / \text{mod}a$

† 7.  $m \in N_0 \rightarrow (\text{mod}a)^m = \text{mod}(a^m)$  8.  $m \in n \cdot a = 0 \rightarrow$  ThsP.7

.9.  $\text{mod}a = \text{mod}b \Rightarrow a^2 = b^2$  } LEIBNIZ *ibid.*: «Quantitates duae diversae, eandem molem habentes semper habent idem quadratum.» }

$\Sigma$  II \* 3.  $m \in N_1 \cdot f \in rF(1 \dots m) \rightarrow$

$$\cdot 1 \text{ mod } \Sigma f \leq \Sigma \text{mod}f \quad \cdot 2 \text{ mod } If = I \text{mod}f$$

\* 4. 0  $a \in R \rightarrow \text{sgn}a = 1 \cdot \text{sgn}(-a) = -1 \cdot \text{sgn}0 = 0$  Df

Cette notation «signum  $a$ » a été introduite par Kronecker *Werke*, t.2 p.39

$a, b \in \rightarrow$  1.  $\text{sgna} \in \{1, 0, -1\}$  11.  $\text{sgn}(-a) = -\text{sgna}$

$$\cdot 2 \text{ sgn}(a \times b) = \text{sgna} \times \text{sgnb} \quad \cdot 3 a = \text{sgna} \times \text{mod}a$$

$$\cdot 4 \text{ sgn}a = \text{sgnb} \rightarrow \text{sgn}(a+b) = \text{sgna}$$

$$\cdot 5 \text{ sgn}(a+b) = \text{sgna} \Rightarrow \text{sgna} = \text{sgnb} \vee \text{mod}a > \text{mod}b$$

$$\cdot 6 a, b \neq 0 \rightarrow \text{sgna} = \text{sgnb} \Rightarrow \text{sgn}(ab) = 1 \Rightarrow \text{sgn}(a/b) = 1$$

$$\cdot 7 a = 0 \rightarrow \text{sgn}/a = \text{sgna}$$

$$\cdot 8 \text{ --- } m \in n \rightarrow \text{sgn } a^{2m} = 1 \cdot \text{sgn } a^{2m+1} = \text{sgna}$$

Continuation : §β P2.6, §Q P80, §Z P1.0, §Lm 1.0, §lim P18, P24, §cont P1.01, §qn P3, P41, §Subst P3, §vct P9.2, P15.

§40 max min

> \* 1.  $u, v \in \text{Cls}'N_0, a, b \in N_0, \supset$

\*0  $\max u = 1 \wedge \exists x(y \in u \wedge x \in y) \supset y, x > y)$  Df

$\max u =$  « le plus grand (maximum) des  $u$  ».

$\min u =$  « le plus petit (minimum) des  $u$  ».

\*1  $\max ua = a$  \*11  $a > b, \supset, \max(ua \cup b) = a$

\*2  $\exists u, m \in N_0, \neg \exists u \wedge m \in N_0, \supset, \exists t \max u$

$\exists t \max u, \exists t \max v, \supset, \exists \max(u \cup v) = \max(t \max u \cup t \max v)$

\*4  $\max(u + v) = (\max u) + (\max v)$

\*5  $\max(u \times v) = (\max u) \times (\max v)$

\*6  $\max(u \uparrow v) = (\max u) \uparrow (\max v)$

n \* 2.  $u, v \in \text{Cls}'n, a, b \in n, \supset, \text{P1} \cdot 0 \cdot 4$

R \* 3.  $u, v \in \text{Cls}'R, a, b \in R, \supset, \text{P1} \cdot 0 \cdot 1, 3 \cdot 5$

\*2  $\text{Num } u \in N_1, \supset, \exists t \max u$

\*6  $u \in \text{Cls}'(1 + R), v \in \text{Cls}'N_0, \exists t \max u, \exists t \max v, \supset, \text{P1} \cdot 6$

r \* 4.  $(r \mid R) \text{P3} \cdot 0 \cdot 4$

\* 11-14.  $(\min, >)(\max, <)$  P1·0·1, 3·6, P2·0·1, 3·4, P3, P4

11·2  $u \in \text{Cls}'N_0, \exists u, \supset, \exists t \min u$

12·2  $u \in \text{Cls}'n, \exists u, m \in N_0, \neg \exists u \wedge m \in N_0, \supset, \exists t \min u$

\*3  $u \in \text{Cls}'n, \exists t \max u, \supset, \min(-u) = -\max u$

13·7  $u \in \text{Cls}'R, \text{————}, \supset, \min / u = / \max u$

\* 15  $u \in \text{Cls}'N_1, n \in N_1, \supset$

\*1  $\min_1 u = \min u, \min_{n+1} u = \min[u \wedge \exists x(x > \min_n u)]$  Df

$\min_n u$  indique donc le  $n^{\text{ème}}$  nombre de la classe  $u$ , en les disposant dans l'ordre croissant. Ex. §Dtrm P3.

\*2  $a \in N_1, m \in N_1 + 1, \text{Num } N_1(a \mid N_1) = m, v \in 1 \cdots m, \supset$

$\min_1(N_1 \uparrow u \mid N_1) \times \min_{m-v}(N_1 \uparrow u \mid N_1) = a$

Continuation: §quot, §Dvr, §mlt, §Np 10, §mp, §Q82-83,

§cres 8, §cont 2·3, §D 4·1

## §41 quot rest

$N_0 \times > \max \quad * \quad 1. \quad a, b \in N_0, c, d \in N_1 \rightarrow$

$$\cdot 0 \quad \text{quot}(a, c) = \max[N_0 \wedge x \exists (xc \leq a)]$$

Df

$\text{quot}(a, c)$  et  $\text{rest}(a, c)$  sont le quotient et le rest de la division de  $a$  par  $c$ . Le dividende est  $a$ , le diviseur est  $b$ . Le cas de  $a=0$  se rencontre p. ex. §Dtrm 8.1. On peut remplacer les signes quot et rest par les signes E et  $\beta$  qui suivent.

$$\cdot 1 \quad \text{quot}(0, c) = 0, \text{quot}(c, c) = 1, \text{quot}(a, 1) = a, \text{quot}(ac, c) = a$$

$$\cdot 2 \quad \text{quot}(ad, cd) = \text{quot}(a, c) \quad \cdot 3 \quad \text{quot}(a, cd) = \text{quot}[\text{quot}(a, c), d]$$

$$\cdot 4 \quad a < c \implies \text{quot}(a, c) = 0 \quad : \quad a \leq c \implies \text{quot}(a, c) \in N_1$$

$$\cdot 5 \quad a > b \rightarrow \text{quot}(a, c) \geq \text{quot}(b, c)$$

$$\cdot 51 \quad c > d \rightarrow \text{quot}(a, c) \leq \text{quot}(a, d)$$

$$\cdot 6 \quad \text{quot}(a+b, c) \geq \text{quot}(a, c) + \text{quot}(b, c)$$

$$\cdot 7 \quad \text{quot}(ac+b, c) = a + \text{quot}(b, c)$$

rest  $* \quad 2. \quad \text{Hp P} \cdot 1 \rightarrow$

$$\cdot 0 \quad \text{rest}(a, c) = a - c \times \text{quot}(a, c)$$

Df

$$\cdot 01 \quad \text{rest}(0, c) = 0, \text{rest}(c, c) = 0 \quad \cdot 02 \quad \text{rest}[\text{rest}(a, c), c] = \text{rest}(a, c)$$

$$+ \quad \cdot 1 \quad \text{rest}(a+c, c) = \text{rest}(a, c)$$

$$\cdot 11 \quad \text{rest}(a+b, c) = \text{rest}[b + \text{rest}(a, c), c]$$

$$\cdot 12 \quad \text{rest}(a+b, c) = \text{rest}[\text{rest}(a, c) + \text{rest}(b, c), c]$$

$$\cdot 13 \quad \text{rest}(a, c) = \text{rest}(b, c) \implies \text{rest}(a+d, c) = \text{rest}(b+d, c)$$

$$> \quad \cdot 14 \quad a < c \rightarrow \text{rest}(a, c) = a \quad \cdot 15 \quad a > c \rightarrow a > 2 \text{rest}(a, c)$$

$$\times \quad \cdot 2 \quad \text{rest}(ad, cd) = d \times \text{rest}(a, c) \quad \cdot 21 \quad a \in N_0 \times c \implies \text{rest}(a, c) = 0$$

$$\cdot 22 \quad \text{rest}(ab, c) = \text{rest}[\text{rest}(a, c) \times \text{rest}(b, c), c]$$

$$\cdot 23 \quad \text{rest}(a, c) = \text{rest}(b, c) \rightarrow \text{rest}(ad, c) = \text{rest}(bd, c)$$

$$\cdot 24 \quad \text{rest}(a+bc, c) = \text{rest}(a, c)$$

$$\cdot 25 \quad \text{rest}(a+b, c) = \text{rest}(b, c) \rightarrow a \in N_0 \times c$$

$$\cdot 26 \quad \text{rest}(a, c) + \text{rest}(b, c) \in N_1 \times c \rightarrow a+b \in N_1 \times c$$

$$\uparrow \quad \cdot 3 \quad \text{rest}(a^3, 6) = \text{rest}(a, 6) \quad \text{rest}(a^2, 4) \in 0 \vee 1$$

$$\cdot 31 \quad m \in N_1 \rightarrow \text{rest}[(a+c)^m, c] = \text{rest}(a^m, c)$$

$$\dots \quad \cdot 5 \quad \text{rest}(a, c) \in 0 \dots (c-1)$$

$$\Sigma \quad \cdot 6 \quad x \in N_1 F 1 \dots m \rightarrow \text{rest}(\Sigma x, c) = \text{rest}[\Sigma \text{rest}(x, c), c]$$

$$\cdot 7 \quad x \in N_1 F 1 \dots m \rightarrow \text{rest}(Hx, c) = \text{rest}[H \text{rest}(x, c), c]$$



quot rest  $\ast$  3.

- 1  $q, r \in N_0, a = cq + r, r < c, \bigcup. q = \text{quot}(a, c), r = \text{rest}(a, c)$
- 2  $\text{quot}[\text{rest}(a, c), c] = 0, \text{quot}[\text{rest}(a, cd), c] = \text{rest}[\text{quot}(a, c), d]$
- 3  $\text{rest}(a, c) + c < \text{rest}[\text{quot}(a, c), d] = \text{rest}(a, cd)$
- 4  $a \leq c, \text{quot}(a, c) = c \times N_1, \bigcup:$   
 $\text{rest}(a, cd) > \text{rest}(a, c), \text{rest}(a, cd) = \text{rest}(a, c) \in c \times N_1$
- 5  $\text{quot}(a+b, c) = \text{quot}(a, c) + \text{quot}[b + \text{rest}(a, c), c]$
- 6  $\text{quot}(a, c) = \text{quot}(a, c+d) \text{ s. } \text{rest}(a, c) \leq [\text{quot}(a, c)] \times d$
- 7  $c > d, \bigcup: \text{quot}(a, c) = \text{quot}(a, c-d) \text{ s. } c - \text{rest}(a, c) > [\text{quot}(a, c) + 1] \times d$
- 8  $\text{quot}(a, c) = \text{quot}(a+b, c+b) \text{ s. } \text{rest}(a, c) \leq [\text{quot}(a, c) - 1] \times b$
- 9  $\max N_1 \wedge \exists \{ \text{quot}(a+x, c) = \text{quot}(a, c) \} = c - \text{rest}(a, c) - 1$

§42 E = (Entier de)  $\beta$  = (partie fractionnaire de)

r  $\ast$  1·0  $x \in r, \bigcup. Ex = r \wedge \exists \{ z \leq x < z+1 \}$  Df

Note. La notation  $Ex$  a été introduite par Legendre, *Théorie des nombres*, II édition p.8 a.1808. La notation de Gauss a.1808 t.2 p.5, est  $[x]$ .

- 1  $x \in r, \bigcup. Ex \in n, Ex \leq x < Ex + 1, EEx = Ex$
- 2  $x \in n, \bigcup. Ex = x$
- + ·3  $x, y \in r, \bigcup: Ex + y \leq Ex + Ey : x > y, \bigcup. Ex \leq Ey$
- ·4  $x \in r \wedge n, \bigcup. Ex + E(-x) = -1$   
 $x \in n, \bigcup. Ex + E(-x) = 0$
- × ·5  $Exy = E(xy)$  Df
- / ·6  $x \in R, \bigcup. E[(Ex)/x] - 1 = Ex + E(-x)$
- 7  $x \in R, a \in N_1, \bigcup. E(x/a) = E\{Ex\}/a\}$

$\Sigma$   $\ast$  2·0  $x \in R, a \in N_1, \bigcup. \Sigma\{[Ex + r/a] | r, 0 \dots (a-1)\} = Eax$   
 } BERTRAND *Arithmétique* a.1851 p.109 {

- 1  $x \in r, a \in N_1, \neg \exists [x \times 1 \dots a] \wedge n, \bigcup.$   
 $\Sigma\{E(rx) | r, 1 \dots a\} + \Sigma\{E(r/x) | r, 1 \dots Eax\} = aEax$   
 } GAUSS a.1808 t.2 p.7 {
- 2  $x \in r, \bigcup. Ex = \Sigma\{E(x/2^r + /2) | r, N_1\}$   
 $\text{-----} = E(x/2 + /2 + E(x/4 + /2 + \dots$   
 } CÉSARO *Excursions Arithm.* a.1885 p.36 {

$$\begin{array}{ll} \max & \cdot 3 \quad x \in \mathbb{R} \cdot \bigcup. Ex = \max[n \wedge y \beta(y \leq x)] & \text{Dfp} \\ \text{quot} & \cdot 4 \quad a, b \in \mathbb{N}_1 \cdot \bigcup. \text{quot}(a, b) = E(a/b) & \text{Dfp} \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} E * & \cdot 3. \quad x, y \in \mathbb{R} \cdot \bigcup. \quad \cdot 0 \quad \beta x = x - Ex & \text{Df} \\ & \cdot 01 \quad \beta \beta x = \beta x \quad . \quad E \beta x = 0 \quad . \quad \beta Ex = 0 \end{array}$$

Zehfuss (Gruert Archiv, a.1850 t.27 p.12) a introduit cette fonction  $\beta x$ ; la lettre  $\beta$  est l'initiale du mot « Bruchtheil ». Elle a été indiquée dans F1898 par  $\Theta x$ . On l'appelle aussi « mantisse », c'est-à-dire « excédent ». Wallis, Opera a.1693 p.41: « E jusque partes decimales abscissas, *appendicem* voco, sive *mantissam* ».

$$\begin{array}{ll} \cdot 1 \quad y \in \mathbb{N} \cdot \bigcup. \quad \beta(x+y) = \beta x & \cdot 11 \quad \beta(x+y) = \beta(\beta x + \beta y) \\ \cdot 2 \quad x \in \mathbb{N} \cdot \bigcup. \quad \beta x + \beta(-x) = 0 & \cdot 21 \quad x \in \mathbb{N} \cdot \bigcup. \quad \beta x + \beta(-x) = 1 \\ \cdot 3 \quad 0 \leq \beta x < 1 & \cdot 31 \quad \beta(x+y) \leq \beta x + \beta y \\ \cdot 4 \quad y \in \mathbb{N} \cdot \bigcup. \quad \beta(xy) = \beta(y \beta x) \\ \cdot 5 \quad a \in \mathbb{N}_1 \cdot \bigcup. \quad E ax = a \times Ex + E(a \beta x) \\ \cdot 6 \quad /2 - \text{mod}(\beta x - /2) = \min \text{mod}(x - n) = \text{mod}(x + Ex - E2x) \\ \text{rest} & \cdot 7 \quad a, b \in \mathbb{N}_1 \cdot \bigcup. \text{rest}(a, b) = b \times \beta(a/b) & \text{Dfp} \\ & \text{Continuation §Q 84, §c 3.} \end{array}$$

## §43 Chf = (chiffre)

$\exists \beta * x \in R \supset$ :

$$\text{Chf } x = \text{EX} \beta X^{-1} x = X \beta X^{-1} \text{Ex} = \text{Ex} - X \text{EX}^{-1} x = \text{rest}(\text{Ex}, X) \quad \text{Df}$$

*Note.* « Chf » qu'on peut lire « le chiffre de », représente le chiffre des unités de  $x$ , dans la base  $X$ , que nous lisons *div*. En conséquence,  $\text{Chf}(X^n x)$  signifie « le chiffre qui suit de  $n$  places le chiffre des unités.

Le symbole « Chf » est tiré du français: car « cyphra » signifie 0 (Euler).

$$\begin{aligned} & \cdot 1 \quad \text{Chf } x \in 0 \cdots 9 \quad \text{Chf } (X_1^2 = t0 \cup t1 \cup t4 \cup t5 \cup t6 \cup t9) \\ & a \in (2N_1) - (5N_1) \supset \text{Chf } a^5 = 6 \quad a \in (N_1 - 2N_1) - (5N_1) \supset \text{Chf } a^5 = 1 \end{aligned}$$

$\cdot 2 \quad a, b \in N_1 \supset$ :

$$a \in 2N_0 \Rightarrow \text{Chf } a \in 2N_0 : a \in 5N_0 \Rightarrow \text{Chf } a \in 5N_0$$

$$a \in 3N_0 \Rightarrow \Sigma[(\text{Chf } X^{-r} a) \mid r, N_0] \in 3N_0$$

$$\gg 9 \quad \gg \quad \gg \quad \gg \quad 9$$

$$a \in b \times N_1 \Rightarrow \Sigma[(\text{Chf } X^{-r} a) \times \text{rest}(X^r, b) \mid r, N_0] \in b \times N_0$$

{ PASCAL a.1654 t.3 p.312 }

Ces formules expriment les " caractères de divisibilité des nombres ".

$\cdot 3 \quad a, n \in N_1 \supset \text{Chf } a^5 = \text{Chf } a \quad \text{Chf } a^{n-4} = \text{Chf } a^n$

$$\text{Chf } a^2 = 6 \Rightarrow \text{Chf } X^{-1} a^2 \in 2N_0 + 1$$

$$m \in (4N_0) \cup (4N_0 + 1) \supset \text{Chf } X^{-17} m = 0$$

$$m \in (4N_0 + 2) \cup (4N_0 + 3) \supset \gg \gg 4$$

$\cdot 4 \quad \exists (m, n) \exists [m, n \in N_1 : p \in m + N_1 \supset \text{Chf}(X^p x) = \text{Chf}(X^{p+n} x)]$

{ WALLIS a.1685 t.2 p.364 :

« ... post processum (Reductionis Fractionum vulgarium ad Decimales) aliquatenus continuatum, redeunt iidem numeri, et eodem ordine circulantur quo prius... semper, si non citius, post tot locos uno minus quot sunt in Divisore unitates ». }

Sibt-el Mâridîni a.1500 (BM. a.1899 t.13 p.33) a rencontré quelques fractions sexagésimales périodiques. Wallis a.1657 (t.1 p.224) a calculé quelques fractions décimales périodiques; mais il a énoncé les principaux théorèmes seulement dans l'ouvrage de l'a.1685.

Continuation : §lim P26.

## §44 Dvr

$N_1 \times \max * 1. u, v \in \text{Cls}'N_1, a, b, c, d \in N_1 \supset$

$\cdot 0 \text{ Dvr } u = Du = \max[N_1 \cap x\exists(u \supset N_1 \times v)]$  Df

$\} * = (\text{le plus grand commun diviseur des } u)\}$

Les notations  $D(a, b)$  et  $m(a, b)$  qu'on rencontre dans Lebesgue, a.1859 p.8, ont été adoptées par Lucas, et par d'autres.

Nous les emploierons dans ces deux §; mais dans la suite nous adopterons les notations plus claires, bien que plus longues, Dvr et mlt.

$\cdot 01 \ u \in N_1 + 1, x \in N_1, F 1 \cdots n \supset Dx = D(x'1 \cdots n)$  Df

Ex.: P.22, §mlt P1.5.6

$\cdot 02 \ D(a, b) = D(ua \vee b)$  Dfp

$\cdot 1 \ D(1a) = a, D(a, a) = a, D(1, a) = 1, D(a, b) = D(b, a)$

$\cdot 11 \ a \in N_1 \times b \supset D(a, b) = b$

$\cdot 12 \ a, b \in N_1 \times c \supset D(a, b) \in N_1 \times c$  {EUCLIDES VII P2: « ἐὰν ἀριθμὸς δύο ἀριθμοὺς μετρή, καὶ τὸ μέγιστον οὐτῶν ζωνδὸν μέτρον μετρήσῃ » }

$\cdot 13 \ D(ac, bc) = c \times D(a, b) \quad \cdot 131 \ D(a, b) = 1 \supset D(ac, bc) = c$

$\cdot 14 \ ab \in N_1 \times c, D(a, c) = 1 \supset b \in N_1 \times c$

$\cdot 15 \ D(a, b \times c) = D[a, b \times D(a, c)]$

$\cdot 16 \ D(a, c) = 1 \supset D(ab, c) = D(b, c)$

$\cdot 17 \ D(a, b) = 1, a \in N_1 \times c \supset D(b, c) = 1$  {EUCLIDES VII P23}

$\cdot 18 \ D(a, c) = 1, D(b, c) = 1 \supset D(ab, c) = 1$  {EUCLIDES VII P24}

$\cdot 19 \ D(a, c) = D(b, c) = D(a, d) = D(b, d) = 1 \supset D(ab, cd) = 1$   
{EUCLIDES VII P26 }

$\cdot 20 \ a \in N_1 \times b, a \in N_1 \times c, D(b, c) = 1 \supset a \in N_1 \times bc$

$\cdot 21 \ D(b, c) = 1 \supset D(a, b \times c) = D(a, b) \times D(a, c)$

$\cdot 22 \ D(a, b, c) = D[D(a, b), c]$  {EUCLIDES VII P3 }

$\mathfrak{A}u \supset \cdot 3 \ Du \in N_1$   
{  $u \in \text{Cls}'N_1, v = N_1 \cap x\exists(u \supset N_1 \times x) \supset 1 \varepsilon v, \S \Gamma \text{ P1.1} \supset \mathfrak{A}v$  (1)

$\Pi p(1), m \varepsilon u \supset \neg \exists v \cap (m + N_1), (1) \cdot \S \max \text{ P1.2} \supset \mathfrak{A} t \max v$  (2)  
(1) . (2) . Elim  $m$  . Elim  $v$  .  $\supset$  . P }

$\cdot 31 \ u \supset N_1 \times v \supset Du \in N_1 \times v \quad \cdot 32 \ D(v \times a) = a \times Du$

$\mathfrak{A}u, \mathfrak{A}v \supset \cdot 33 \ D(u \vee v) = D(Du, Dv)$

$\cdot 34 \ D(v \times r) = (Du) \times (Dv)$  {STIELTJES a.1895 p.4}

\* 2.  $a, b, c, d, m, n \in N_1 \supset$ :

+ 11  $D(a+b, b) = D(a, b)$  { EUCLIDES VII P1 {

[  $\S \times P2.2.3 \supset, \max[N_1 \wedge \exists x \exists (a, b \in N_1 \times x)] = \max[N_1 \wedge \exists x (a+b, b \in N_1 \times x)] \supset, P$  ]

12  $D(a, a+1) = 1$  [ P41  $\supset, D(a, a+1) = D(a, 1)$  , P1  $\supset, P$  ]

13  $D(a+bc, b) = D(a, b)$

14  $D(a, b) = 1, D(b, m) = 1, D(a, n) = 1 \supset, D(ab, am+bn) = 1$

15  $D(a, b) = 1 \supset, D(a+b, ab) = 1$

16  $a > b, D(a, b) = 1 \supset, D(a-b, ab) = 1$

17  $D(a, b) = D(a+bm, a+bm+b) = D(a+bm, a+bm-b)$

- 21  $D(2a-1, 2a+1) = 1$

22  $a \in 2N_1, b \in 2N_1+1, a > b \supset, D(a+b, a-b) = D(a, b)$

23  $a, b \in 2N_1+1, --- \supset, --- = 2D(a, b)$

24  $a > b, D(a, b) = 1 \supset, D(a+b, a-b) = 1 \wedge 2$

/ 3  $D(a, b) = D(c, d) = 1, a/b = c/d \supset, a=c, b=d$

31  $a/b = c/d, D(a, b) = 1 \supset, c/a = d/b = D(c, d)$

{ 331 EUCLIDES VII P20,21 {

32  $D[a/D(a, b), b/D(a, b)] = 1$

33  $a, b, c \in 2N_0+1 \supset, D(a, b, c) = D[(a+b)/2, (a+c)/2, (b+c)/2]$

∩ 4  $D(a, b) = 1 \supset, D(a^m, b^n) = 1$  { EUCLIDES VIII P2,3 {

41  $D(a, b) = 1 \supset, \{$

$D(a^2+ab, b^2) = 1, D(a^2+b^2, ab) = 1$  { EUCLIDES IX P15 {

42  $a > b, D(a, 10) = D(b, 10) = 1 \supset, a^2+b^2 \in 10N_1, a^2-b^2 \in 10N_1$

43  $D(a, b) = 1, D(a+b, 3) = 1 \supset, D(a+b, a^2-ab+b^2) = 1$

44  $D(a, b) = 1 \supset, (N_1+1) \wedge a^2+b^2/N_1 \supset N_1^2+N_1^2$

45  $a, b \in N_1-N_1^2, ab \in N_1^2 \supset, D(a, b) > 1$   
 { LEBNIZ a.1678 *Math. Schol.* t.7 p.122 {

46  $D(a, b) = 1 \supset$ :

$N_1 \wedge a^2+b^2/N_1 \supset (4N_0+1) \wedge 2, N_1 \wedge a^2+b^2/N_1 \supset (8N_0+1) \wedge 2$

47  $D(a, b) = 1 \supset, N_1 \wedge [a^2 \cdot 2^m + b^2 \cdot 2^n]/N_1 \supset (N_0 \times 2^{m+n} + 1) \wedge 2$   
 { EULER PetrNC. t.1 a.1747-48 p.32 {

48  $N_1 \wedge 2^{2^k} + 1/N_1 \supset 16nN_0 + 1$

49  $D(a, b) = 1, ab \in 4N_1+1 \supset, N_1 \wedge a^{2^{2^m}} + b^{2^{2^n}}/N_1 \supset (8abnN_0+1) \wedge 2$   
 { 4849 LUCAS TorinoA. a.1878 t.13 p.281 {

Num 5  $D(a, b) = \text{Num } 1 \wedge b \wedge \exists x (a, x \in N_1 \times b)$

rest 6  $a \in N_1, b \supset, D(a, b) = D[b, \text{rest}(a, b)]$

61  $D(a, b) = D[b, b - \text{rest}(a, b)]$

E ·7  $a, b \in \mathbb{N}_0$ .  $\text{Dvr}(2a+1, 2b+1) = 1$ .  $\bigcup$ .

$\Sigma \{ [E_r(2a+1)/(2b+1)] | r, 1 \dots b \} + \Sigma \{ [E_r(2b+1)/(2a+1)] | r, 1 \dots a \} = ab$   
 $\{ \text{GAUSS a.1808 t.2 p.7} \}$

·71  $a, b \in \mathbb{N}_1$ .  $\bigcup$ .  $D(a, b) = b + \Sigma [E(ah/b) | h, 1 \dots b] + \Sigma [E(-ah/b) | h, 1 \dots b]$

n  $\ast$  3·0  $u \in \text{Cls}'n$ .  $\exists u \neq 0$ .  $\bigcup$ .  $Du = \max[N_1 \wedge x \exists (u \bigcup n \times x)]$  Df  
 ·01  $D(0) = 0$  Df

·1  $u \in \text{Cls}'n$ .  $\bigcup$ .  $D(u \cup 0) = Du$  .  $Du = D \bmod u$

·2  $a, b, c \in n$ .  $\bigcup$ :  $\exists (x, y) \exists (r, y \in n . ax + by = c) . c \in n \times D(a, b)$

·3  $a, c \in n$ .  $b \in \mathbb{N}_1$ .  $D(a, b) = 1$ .  $\bigcup$ .  $\exists 0 \dots (b-1) \wedge x \exists (ax - c \in nb)$

·4  $a, b, c \in n$ .  $D(a, b) = 1$ .  $u, v \in n$ .  $au + bv = c$ .  $\bigcup$ :

$x, y \in n$ .  $ax + by = c$  .  $\exists n \exists z [x = u + bz . y = v - az]$

R  $\ast$  4·0  $u \in \text{Cls}'R$ .  $\bigcup$ .  $Du = \max[R \wedge x \exists (u \bigcup N_1 \times x)]$  Df

·1  $a, b, c \in \mathbb{N}_1$ .  $\bigcup$ .  $D(a/c, b/c) = [D(a, b)] / c$

$\{ \text{BERTRAND a.1849 p.105} \}$

$u, v \in \text{Cls}'R$ .  $\exists u$ .  $\exists v$ .  $a \in R$ .  $n \in \mathbb{N}_1$ .  $\bigcup$ . ·2  $D(u \times v) = (Du) \times Dv$

·3  $(Du)^n = D(u^n)$  ·4  $D[a^n(0 \dots n)] = [D(1, a)]^n$

$\{ \text{BARRIEU AnnN. a.1895 t.14 p.214} \}$

Continuation : §mlt 1·41 2·2, §nt ·9, §Np 12, § $\Phi$ , §Dtrm 4·1.

## §45 mlt

$\mathbb{N}_1 \times \min \ast$  1.  $u, v \in \text{Cls}'\mathbb{N}_1$ .  $a, b, c, d \in \mathbb{N}_1$ .  $\bigcup$ .

·0 mlt  $u = mu = \min[N_1 \wedge x \exists (y \in u . \bigcup_y . x \in N_1 \times y)]$  Df

$\{ \gg = (\text{le plus petit multiple commun des } u) \}$

·01  $n \in \mathbb{N}_1 + 1$ .  $x \in N_1 F 1 \dots n$ .  $\bigcup$ .  $mx = m(x' 1 \dots n)$  Df

·02  $m(a, b) = m(u \cup vb) = \min(a \times N_1 \wedge b \times N_1)$

·1  $ma = a$  .  $m(a, a) = a$  .  $m(1, a) = a$  .  $m(a, b) = m(b, a)$

·11  $a \in N_1 \times b$ .  $\bigcup$ .  $m(a, b) = a$

·12  $c \in N_1 \times a$  .  $c \in N_1 \times b$ .  $\bigcup$ .  $c \in N_1 \times m(a, b)$   $\{ \text{EUCLIDES VII P35} \}$

·13  $m(ac, bc) = c \times m(a, b)$

·2  $m(a, b, c) = m[m(a, b), c]$   $\{ \text{EUCLIDES VII P36} \}$

$\text{Num } u \in \mathbb{N}_1$ .  $\bigcup$ . ·3  $mu \in \mathbb{N}_1$  ·31  $m(u \times a) = a \times mu$

·32  $y \in u$ .  $\bigcup_y$ .  $a \in N_1 \times y$ .  $\bigcup$ .  $a \in N_1 \times mu$

- Num  $u, \text{Num } v \in N_1 \cdot \supset \cdot 33 \text{ } m(u \vee v) = m(mu, mv)$   
 $\cdot 34 \text{ } m(u \times v) = mu \times mv \quad \} \text{STIELTJES a.1895 p.4 } \{$   
 $\cdot 35 \text{ } n \in N_1 + 1 \cdot \supset \cdot m(1 \cdots 2n) = m[(n+1) \cdots 2n]$
- Dvr  $\cdot 41 \text{ } D(a, b) = 1 \cdot \supset \cdot m(a, b) = a \times b \quad \} \text{EUCLIDES VII P.34 } \{$   
 $\cdot 42 \text{ } D(a, b) \times m(a, b) = a \times b \quad \} \quad \gg \quad \gg \quad \gg \quad \{$   
 $\cdot 5 \text{ } D(a, b, c) \times m(ab, ac, bc) = abc$   
 $m \text{ ----- } D \text{ -----}$   
 $D(a, b, c, d) \times m(abc, abd, acd, bcd) = abcd$   
 $m \text{ ----- } D \text{ -----}$   
 $\cdot 51 \text{ } \text{Hp P.01} \cdot \supset \cdot$   
 $Dx \times m[(Hx)/x, 1 \cdots n] = Hx, mx \times D[(Hx)/x, 1 \cdots n] = Hx$   
 $\cdot 6 \text{ } m(a, b, c) D(a, b) D(a, c) D(b, c) = abc D(a, b, c)$   
 $\} \cdot 5\text{-}6 \text{ LEBESGUE a.1859 p.31,34 } \{$   
 $\cdot 7 \text{ } a, b, m, n, r \in N_1, x^m - 1 \in N_1 \times a, x^n - 1 \in N_1 \times b, D(a, b) = 1 \cdot \supset \cdot$   
 $x \nmid m(m, n) - 1 \in N_1 \times a \times b$   
 $\cdot 8 \text{ } [N_1, b \in N_1 \times a, D(a, b), m(a, b), 1] \mid [\text{Cls}, a \supset b, a \vee b, a \wedge b]$   
 $\S 1 \text{ P4.2.4.5 } 5\cdot 2\cdot 64 \text{ } 6 \text{ } 7\cdot 2\cdot 4 \text{ } \S 2 \text{ } \S 3$

Cette P.8 dit que les P de Logique que nous venons de citer subsistent si l'on remplace Cls par  $N_1$ , " tout  $a$  est  $b$  " par "  $a$  est un diviseur de  $b$  ",....

- R  $\ast \cdot 2\cdot 0 \text{ } u \in \text{Cls}'R \cdot \supset \cdot m u = \min[R \wedge r3(a \supset x/N_1)] \quad \text{Df}$   
 $\cdot 1 \text{ } a, b, c \in N_1 \cdot \supset \cdot m(a/c, b/c) = [m(a, b)]/c \quad \} \text{BERTRAND a.1849 p.107 } \{$   
 $\cdot 2 \text{ } a, b \in R \cdot \supset \cdot D(a, b) \times m(a, b) = ab \quad \} \quad \gg \quad \gg \quad \gg \quad \{$   
 $a \in \text{Cls}'R, \text{Num } a \in N_1 \cdot \supset \cdot$   
 $\cdot 3 \text{ } Da \times m/a = 1$   
 $\cdot 4 \text{ } r \in R \cdot \supset \cdot D(ra) = rDa, m(ra) = rma$   
 $\cdot 5 \text{ } s \in N_1 \cdot \supset \cdot D(a^s) = (Da)^s, m(a^s) = (ma)^s$   
 $n \in N_1, a \in R \text{ F } 1 \cdots n, s \in 1 \cdots n \cdot \supset \cdot$   
 $\cdot 6 \text{ } D\{H(a, u) \mid u, \text{Cls}'1 \cdots n \wedge r3(\text{Num } x = s)\} \times$   
 $m\{ \text{-----} \text{-----} = n-s \} = Ha$   
 $\} \cdot 3\text{-}6 \text{ BARRIEU Mathesis a.1883 t.3 p.217 } \{$   
 $u, r \in \text{Cls}'R, \text{Num } u, \text{Num } r \in N_1, a \in R, u \in N_1 \cdot \supset \cdot$   
 $\cdot 72\text{-}74 = (m \mid D) \S \text{Dvr P4.2.4 } \} \text{BARRIEU AnnN. a.1895 t.14 p.214 } \{$

## §46 nt dt

/ R min \* 1.  $a, b \in R, \supset$ .

$$\cdot 1 \quad nta = \min\{N_1 \wedge x3[x/y = a]\} \quad \text{Df}$$

$$\cdot 2 \quad dta = \min\{N_1 \wedge y3[x/y = a]\} \quad \text{Df}$$

$$\cdot 3 \quad nta, dta \in N_1 \quad . \quad dta = nt/a \quad . \quad nta = dt/a$$

$$\cdot 4 \quad nta = \min[N_1 \wedge N_1 \times a] \quad . \quad dta = \min[N_1 \wedge N_1/a] \quad \text{Dfp}$$

$$\cdot 5 \quad nta = a \times dta \quad . \quad dta = nta/a \quad . \quad nta/dta = a$$

$$\cdot 51 \quad a \in N_1 \times b \quad . \quad nta \in N_1 \times nt b \quad . \quad dt b \in N_1 \times dta$$

} V. MURER. *Bollettino diretto da A. Conti*, a.1900 t.2 p.10 {

$$\cdot 6 \quad a+b \in N_1, \supset, dta = dtb \quad . \quad a-b \in N_1, \supset, dta = dtb$$

$$\cdot 7 \quad m \in N_1, \supset, dt(m+a) = dta \quad : \quad m > a, \supset, dt(m-a) = dta$$

$$\uparrow \cdot 8 \quad m \in N_1, \supset, nt(a^m) = (nta)^m \quad . \quad dt(a^m) = (dta)^m$$

$$\cdot 81 \quad m \in N_1, \supset, a \in R'' \quad . \quad nta \in N_1'' \quad . \quad dta \in N_1''$$

Dvr mlt  $\cdot 9 \quad \text{Dvr}(nta, dta) = 1$

$$\cdot 91 \quad nta = / \text{Dvr}(1, /a) \quad . \quad dta = / \text{Dvr}(1, a) \quad \text{Dfp}$$

$$\cdot 92 \quad - = / \text{mlt}(1, a) \quad - = / \text{mlt}(1, /a) \quad \text{Dfp}$$

$$\cdot 93 \quad a \in \text{Cls } R, \text{Num } a \in N_1, \supset, \text{Dvr } a = \text{Dvr}(nt'a) / \text{mlt}(dt'a)$$

$$\cdot 94 \quad \gg \gg \gg \supset, \text{mlt } a = \text{mlt}(nt'a) / \text{Dvr}(dt'a)$$

} BARRIEU *Mathesis* a.1883 t.3 p.217 {

\* 2.  $a, b \in N_1, \supset$ .

$$\cdot 1 \quad nt(a/b) = a / \text{Dvr}(a, b) \quad \cdot 2 \quad dt(a/b) = b / \text{Dvr}(a, b)$$

$$\cdot 3 \quad \text{Dvr}(a, b) = 1 \quad . \quad a = nt(a/b) \quad . \quad b = dt(a/b)$$

$$\cdot 4 \quad nt(a/b) = \text{mlt}(a, b) / b \quad \cdot 5 \quad dt(a/b) = \text{mlt}(a, b) / a$$

$nt a =$  « le numérateur de  $a$  »

$dt a =$  « le dénominateur de  $a$  »

en supposant que le nombre rationnel  $a$  soit réduit à la forme plus simple.

Voir A. Padoa *RdM.* a.1898 p.90-94.

Continuation: §Np P14 §mp 3.



§51 Np = (nombre premier)

$$\times \quad * \quad 1.0 \quad \text{Np} = (1 + \text{N}_1) - [1 + \text{N}_1] \times (1 + \text{N}_2) \quad \text{Df}$$

$$1 \leq 2, 3, 5, 7, 11, \dots \in \mathbb{N}_p$$

} Voir : BURCKHARDT, *Table des diviseurs pour tous les nombres du premier, deuxième, troisième million*, Paris 1814-1817.

GLAISHER, *Tables des diviseurs pour tous les nombres du 1<sup>me</sup>, 5<sup>me</sup>, 6<sup>me</sup>, million*, London 1879-83.

DASE, *Table des diviseurs pour tous les nombres du*  
*7<sup>me</sup>, 8<sup>me</sup>, 9<sup>me</sup> million*. Hamburg 1862-1865.

DASE et ROSENBERG, *Id. du 10<sup>me</sup> million*. Archiv der Akademie, (*non publiée*) Berlin.

$$2 \quad a \in N_p, b, c \in N_1, bc \in N_1 \times a \implies bc \in N_1 \times a \text{ and } c \in N_1 \times a$$

EUCLIDES VII P30:

Ἐὰν δύο ἀριθμοὶ πολλαπλασιάσαντες ἀλλήλους ποιῶσιν τινα, τὸν δὲ γινόμενον ἐξ αὐτῶν μετῶν τις προῖτος ἀριθμὸς, καὶ ἕνα τῶν ἐξ ἀρχῆς μετρήσει,

·3  $N_i+1 \supset N_i \times N_p$  ) EUCLIDES VII P31 :

Ἄπας σύνθετος ἀριθμὸς ἐπὶ πρῶτον πρὸς ἀριθμοῦ μεταβίται. }

\*4  $2(N_p+1) \supset N_p+N_p$  } GOLDBACH a.1742 CorrM. t.1 p.135 }

G. Cantor (Congrès de Caen de l'A.F., a.1894) a vérifié que  $2 \times (2 \cdots 500) \supset \text{Np} \vdash \text{Np}$ ; V. Aubry (IdM. t.3 a.1896 p.75) que  $2 \cdots 2 \cdots 1000 \supset \text{Np} \vdash \text{Np}$ .

$$- \quad * \quad 2 \cdot 1 \quad \text{Np} \cap (N_i + 3) \supset (6N_i + 1) \cup (6N_i - 1)$$

§ BUNGEI a.1599 p.399 : ...semper ... numeri primi post binarium et ternarium, in senariorum multiplicitum vicinia collocati comperientur, aut uno minores, aut uno majores. §

$$\cdot 2 \quad a \in N_1 + 3, \supset \exists Np \wedge (a + N_1) \wedge (2a - N_1 - 2)$$

BERTRAND JP. a.1845 Cahier 30 p.129.

Dem. TCHEBYCHEF a.1852 Œuvres t.1 p.52 (

$$\mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \times \mathbb{N} \text{ by } (x, y) \mapsto (x + y, xy).$$

} LEONARDO PISANO a.1202 p.38:

\*Qui primum numerum... cognoscere voluerit... semper eat dividendo ipsum per primos numeros ordinate, donec aliquem primum numerum invenerit, per quem propositum numerum absque alia superatione possit dividere, vel donec ad eiusdem pervenerit radicem: si per nullum ipsorum dividi potuerit, tunc primum ipsum esse indicabit.\* ;

·2  $Np \cap (4N_1+1) \supset N_1^2+N_1^2$  { GIRARD a.1634 p.156 :

« Tout nombre premier qui excède un nombre quaternaire de l'unité se peut diviser en deux quarrés entiers. » }

·21  $a, b, c, d \in N_1 . a^2+b^2=c^2+d^2 . a^2+b^2 \in Np . \supset . ia \cup ib = ic \cup id$

{ FERMAT t.1 p.294 : « Numerus primus qui superat unitate quaternarii multiplicem, semel tantum est hypotenusa trianguli rectanguli » }

·22  $a \in Np \cap (4N_0+3) . b, c \in N_1 . b^2+c^2 \in N_1 \times a . \supset . b, c \in N_1 \times a$

{ FERMAT a.1640 t.2 p.204 :

« Si un nombre est composé de deux quarrés premiers entre eux, je dis qu'il ne peut être divisé par aucun nombre premier moindre de l'unité qu'un multiple du quaternaire » .

Continuation : §mp 1·7.

·3  $Np \cap (3N_0+1) \supset N_1^2+3N_1^2$  { FERMAT a.1654 t.2 p.313 {

$Np \cap [(8N_1+1) \cup (8N_0+3)] \supset N_1^2+2N_1^2$  { » , {

$Np \cap [(8N_1+1) \cup (8N_1-1)] \supset N_1^2-2N_1^2$

Continuation : LEGENDRE a.1797 tables 3 et 4.

·4  $2^2-1, 2^3-1, 2^5-1, 2^7-1 \in Np$  { EUCLIDES IX P36 scolia {

$2^{13}-1, 2^{17}-1, 2^{19}-1 \in Np$

$2^{31}-1 \in Np$  { EULER BerlinM. a.1772 p.35 {

$2^{61}-1 \in Np$  { PERVOUCHINE, Acad. S. Petersbourg, a.1883 {

$2^1+1, 2^2+1, 2^4+1, 2^8+1, 2^{16}+1 \in Np$  Voir §P 5·6.

$7 \times 2^{50}+1 \in Np$  { SEELHOFF Zm. a.1886 t.31 p.380 {

·5  $n \in N_1 . \supset . (2^n)^n+1 \in Np$

{ GERGONNE a.1828 Ann. t.19 p.256; Dem? }

·6  $m \in N_1 . \supset : m^4+4 \in Np . = . m=1$  [ §P 14·25.  $b=1 . \supset . P$  ]

{ GOLDBACH a.1742 CorrM. t.1 p.139 ; S. GERMAIN a.1772 p.296 {

·7  $a \in Np . b, n \in N_1 . b^n \in N_1 \times a . \supset . b \in N_1 \times a$  { EUCLIDES IX P12 {

·71 ————— .  $a^n \in N_1 \times b . \supset . b \in a \nmid N_1$  { , , P13 {

·8  $m \in N_1 . 2^m+1 \in Np . \supset . m \in 2 \nmid N_0$  { FERMAT a.1640 t.2 p.205 {

[  $p \in 2N_1+1 . m \in N_1 . \S P 5·7 . \supset . 2^{mp}+1 \in (N_1+1) \times (2^m+1) . \supset . P$  ]

·9  $a \in Np . b \in (1+N_1) \cdot (N_1 \times a) . \supset . b^{a-1}-1 \in N_1 \times a$

{ Les chinois ont connu cette P pour  $b=2$ , dès le temps de Confucius.  
a. —550—477 ; cfr. Heans Mm. a.1898 t.27 p.174 }

{ FERMAT a.1640 t.2 p.209 :

« Tout nombre premier mesure infalliblement une des puissances —1 de quelque progression que ce soit, et l'exposant de la dite puissance est

sous multiple du nombre premier donné  $-1$ ; et après qu'on a trouvé la première puissance qui satisfait à la question, toutes celles dont les exposants sont multiples de l'exposant de la première satisfont tout de même à la question. »

{ Dem. LEIBNIZ *MathS.* t.7 p.154; EULER PetrNC. a.1736 t.8 p.143; PetrNC. t.8 p.70 }

\*91  $a \in \text{Np}, b, c \in \text{N}_1, \bigcup, (b+c) \equiv b'+c' \pmod{a} \in \text{N}_1 \times a$   
{ EULER PetrNC. a.1747 t.1 p.20 }

\* 41  $m \in \text{N}_1, 4m+1 \in \text{Np}, \bigcup, m^m-1 \in \text{N}_0 \times 4m+1$   
{ BIKMORE a.1896 *Ed. Times*, t.65 p.78 }

\*2  $m \in 2\text{N}_1, \bigcup, 2^m+1 \in \text{Np} \equiv, 3\text{N} 2\text{N} m-1 \pmod{4} \in \text{N}_1 \times [2\text{N} m+1]$   
{ PROTH CorrN. a.1878 t.4 p.210 }

\*3  $m \in \text{N}_1, 2^m-1 \in \text{Np}, \bigcup, m \in \text{Np}$  { FERMAT a.1640 t.2 p.198 }

\*4  $q \in \text{N}_0, 4q+3, 8q+7 \in \text{Np}, \bigcup, 2^{q^2-3}-1 \in (8q+7)\text{N}_1$   
{ LUCAS TorinoA. a.1875 t.13 p.283 }

\* 5.  $m, a, b, c \in \text{N}_1, p \in \text{Np} \nmid 2, \bigcup,$

\*1  $a^m+b^m \in \text{Np}, \bigcup, m \in 2\text{N}_1$

\*2  $a \equiv b' \pmod{a} \in \text{Np}, \bigcup, m \in \text{Np}, a \equiv b+1$

\*3  $\text{N}_1 \wedge (a \equiv b' \pmod{a}) \bigcup [\text{N}_1 \wedge (a \equiv b' \pmod{a})] \times (\text{N}_1 \times p+1)$

\*4  $\text{N}_1 \wedge (2^m-1) \pmod{a} \bigcup \text{N}_0 \times p+1$

\*5  $a^{m-1}+b^{m-1} \in \text{N}_1 \times p, \bigcup, a, b \in \text{N}_1 \times p$

{ 4-5 EULER PetrNC. a.1747-48 I p.20 }

\*9  $a \in \text{N}, 2a+1 \in \text{Np}, b \in \text{N} \equiv m(2a+1), \bigcup,$

$(-b)^m-1 \in m(2a+1) \equiv, b \in \text{N}^2 + (2a+1)\text{N}$

{ LEGENDRE a.1797 N.134 }

Les nombres  $n^2+m$  s'appellent « résidus quadratiques de  $a$  ».

... \* 61  $x \in 0 \dots 9, \bigcup, x^2+x+11 \in \text{Np}$

\*2  $x \in 0 \dots 15, \bigcup, x^2+x+17 \in \text{Np}$  { EULER *Op. post.* t.1 p.185 }

\*3  $x \in 0 \dots 39, \bigcup, x^2+x+41 \in \text{Np}$  { EULER BerlinM. a.1772 p.36 }

\*4  $x \in 0 \dots 28, \bigcup, 2x^2+29 \in \text{Np}$  { LEGENDRE a.1797 p.19 }

Num \* 71 Num  $\text{Np} \in \text{inf}$  { EUCLIDES IX P20:

*Οἱ πρώτοι ἀριθμοὶ πλείους εἶναι παντὸς τοῦ προτεθέντος πλείθους πρώτων ἀριθμῶν. {*

\*2 Num  $\text{Np} \wedge (4\text{N}_1+3) \in \text{inf}$

\*3 Num  $\text{Np} \wedge (4\text{N}_1+1) \in \text{inf}$  Continuation: P12-7

\*4 Num  $\text{Np} \wedge [2\text{N} 2\text{N}_1+1] \in \text{inf}$   
{ EISENSTEIN a.1843 JfM. t.27 p.87; Dem? }

Σ \* 8.1  $p \in Np \cdot t2 . q \in 1 \cdots (p-1) . \supset . \Sigma \{1 \cdots (p-1)\} \uparrow q \in N_1 \times p$   
 {MATROT, Revue semestrielle a.1900, t.8, p.40}

·2  $m \in N_0 . n \in N_1 . p \in Np \cdot t2 . q \in 1 \cdots (p-1) . \supset .$   
 $\Sigma \{p \uparrow [m(p-1)+q]\} \cdot 1 \cdots (np-1) \in N_1 \times p$   
 {PAPPIT, Revue semestrielle a.1900, t.8, p.40}

·3  $n \in N_1 . x \in N_1 F 1 \cdots n . a \in Np . \supset . (\Sigma x)^a - \Sigma (x^n) \in N_1 \times a$

II ! C \* 9.1  $a \in (N_1 + 4) \cdot Np . \supset . (a-2)! \in N_1 \times a$

·2  $a \in Np . \supset . (a-2)! - 1 \in N_0 \times a$   
 {LEIBNIZ Mss. Math. t.3 B11 fol.10:

« Productus continuorum usque ad numerum qui anteprecedit datum divisus per datum relinquit 1, ... si datus sit primitivus. Si datus sit derivativus relinquet numerus qui cum dato habeat communem mensuram unitate majorem. » {

·3  $a \in 1 + N_1 . (a-1)! + 1 \in N_1 \times a . \supset . a \in Np$   
 {LAGRANGE a.1771 t.3 p.432 {

·4  $a \in Np . \supset . (a-1)! + 1 \in N_1 \times a$  { WILSON, Voir WARING  
 a.1770 p.218; Dem. LAGRANGE a.1771 t.3 p.425 {

·5  $a \in Np . = . a \in N_1 + 1 . (a-1)! + 1 \in N_1 \times a$  [ = ·3.4 ]

·6  $a \in N_1 . 4a+1 \in Np . \supset . [(2a)!]^2 + 1 \in N_1 \times (4a+1)$

·61 » . 4a-1 » » - » - »

{ WARING a.1770; a.1782 p.330 : « Sit  $n$  numerus primus ...

$$\frac{2^2 3^2 4^2 5^2 \dots \frac{n-1}{4} \pm 1}{n} \quad (\text{ubi erit } +1, \text{ quando } \frac{n-1}{2} \text{ fit par}$$

numerus, sin aliter  $-1$  integri erunt numeri. » {

{ Dem. LAGRANGE a.1771 t.3 p.431 {

·7  $a \in Np . b \in 1 \cdots (a-1) . \supset . C(a, b) \in N_1 \times a$   
 {LEIBNIZ *Math. Schr.* t.7 p.102:

« Si numerus rerum sit primitivus, combinatio ejus quaelibet per ipsum dividi potest, dempta prima et ultima. » {

·71  $a \in Np . b \in 0 \cdots (a-1) . \supset . C(a-1, b) \in N_0 \times a + (-1)^b$

·72  $a \in Np \cdot t2 . b \in 2 \cdots (a-1) . \supset . C(a+1, b) \in N_1 \times a$   
 { ·71-72 LUCAS A.J. a.1878 t.1 p.229 {

·73 Hp·7  $\supset . C(a-2, b-1) \in N_1 \times a - (-1)^b \times b$

·8  $n \in N_1 + 1 . a \in Np . x \in N_1 F 1 \cdots n . Hx \in N_1 \times a . \supset .$   
 $\exists 1 \cdots n \wedge \exists x_r \in N_1 \times a$

\*81  $n \in N_1 + 1, a \in Np, r \in Np \mid 1 \cdots n, H, v \in N_1 \times a, \supset$   
 $\{ 1 \cdots n \wedge r \exists (v_r = a) \}$

min \* 10:1  $a \in 1 + N_1, \supset, \min[1 + N_1 \wedge (a/N_1)] \in Np$   
 $a \in Np, b \in (N_1 + 1) - N_1 \times a, \supset$ .

\*21  $\min[N_1 \wedge x \exists b^x - 1 \in a \times N_1] \in N_1 \wedge (a - 1)/N_1$

\*22  $N_1 \wedge x \exists b^x - 1 \in a \times N_1 = N_1 \times \min[N_1 \wedge x \exists b^x - 1 \in a \times N_1]$   
 $\{ \text{FERMAT voir P3:9} \}$

\*3  $a \in N_1, \supset, \min[N_1 + 1 \wedge x \exists a! + 1 \in x \times N_1] \in Np \wedge N_1 + a$

E  $\beta$  \* 11.

\*1  $a \in N_1, \supset, a! = H \mid H[H \mid Np \wedge 0 \cdots E(s^{-1} \times \sqrt[n]{a}) \mid s, N_1] \mid r, N_1 \}$   
 $\{ \text{TCHEBYCHEF a.1852 Oeuvres t.1 p.53} \}$

$m, n \in N_1, p \in Np, \supset$ .

\*2  $C(m, n) \in H \mid C[p\beta(m/p^r), p\beta(n/p^r)] \mid r, N_1 \} + N_1 \times p$

\*3  $C(m, n) \in C[E(m/p), E(n/p)] \times C[p\beta(m/p), p\beta(n/p)] + N_1 \times p$   
 $\{ *2:3 \text{ LUCAS a.1878 AJ. t.1 p.230} \}$

Dvr \* 12:1  $b \in Np, a \in N_1 - (N_1 \times b), \supset, \text{Dvr}(a, b) = 1$   
 $\{ \text{EUCLIDES VII P29:} \}$

"*Απας πρωτος αριθμος προς παντα αριθμους, ου μη μετασει, ποσοτος εστιν.*"

\*2  $b \in Np, a \in 1 \cdots b - 1, \supset, \text{Dvr}(a, b) = 1 \quad \{ \text{P:1 } \supset, \text{P} \}$

\*3  $a, b \in Np, a \neq b, \supset, \text{Dvr}(a, b) = 1 \quad \begin{matrix} \text{,} & \text{,} \end{matrix}$

$m, n, a, b \in N_1, p \in Np, \supset$ .

\*4  $a^m + b^n \in Np, \supset, \text{Dvr}(m, n) \in 2 \nmid N_0 \quad \{ \text{LUCAS a.1891 p.342} \}$

\*5  $a^m - b^n \in N_1 \times p, \supset, a \nmid \text{Dvr}(m, p - 1) - b \nmid \text{Dvr}(n, p - 1) \in N_1 \times p$   
 $\{ \text{EULER PetrNC. a.1747-48 t.1 p.20} \}$

\*6  $a, b \in N_1, \text{Dvr}(a, b) = 1, \supset, \text{Num}[Np \wedge a + N_1 \times b] \in \text{infu}$   
 $\{ \text{LEGENDRE a.1808 p.398; Dem. DIRICHLET a.1837 t.1 p.313} \}$

\*7  $\text{Num}[(x; y \exists x, y \in N_1, xy = a, \text{Dvr}(x, y) = 1, x < y)] =$   
 $2 \nmid [\text{Num}(Np \wedge a/N_1) - 1] \quad \{ \text{LEGENDRE a.1797 p.8} \}$

nt \* 13.  $p \in Np, p > 3, \supset$ .

\*1  $\text{nt}_5[1 \cdots (p - 1)] \in p^2 \times N_1 \quad \{ \text{OSBORN a.1892 Mm. t.22 p.51} \}$

\*2  $\text{nt}_5[1 \cdots (p - 1)]^2 \in p \times N_1 \quad \{ \text{GLAISHER a.1900 QJ. t.31 p.337} \}$

Continuation : §mp \*41, §Φ \*6, §Nprf, §lim 31, §log 3:1-2.

## §52 mp

$\vdash \max * 1. a \in N_1, b \in N_1 + 1, \sup.$

\*0  $\text{mp}(b, a) = \max[N_0 \circ x3(a \in N_1 \times b^x)]$  Df

\*11  $\text{mp}(b, 1) = 0$

$\text{mp } b, a =$  l'exposant de la plus grande puissance maxima potestas de  $b$  qui divise  $a$ . En général (P.41 et suivantes)  $b \in N_p$ .

\*12  $\text{mp}(b, a) = \iota N_0 \circ x3[a \in (b^x \times N_1) \circ (b^{x-1} \times N_1)]$  Dfp

\*13  $\text{---} [0 \dots x = N_0 \circ y3(a \in b^x \times N_1)]$  Dfp

\*2  $a \in N_1 \times b, \sup. \text{mp}(b, a) = 0 \quad \text{---} a \in N_1 \times b, \sup. \text{mp}(b, a) \in N_1$

Dvr \*4  $c \in N_1, \text{Dvr}(b, c) = 1, \sup. \text{mp}(b, a) = \text{mp}(b, ac)$

Np \*41  $a \in N_p, b, c \in N_1, \sup. \text{mp}(a, bc) = \text{mp}(a, b) + \text{mp}(a, c)$

\*5  $a \in N_1 \times b, \text{---} a \in N_p, \sup. x, \text{mp}(x, b) \leq \text{mp}(x, a)$

\*6  $m \in N_1, \sup. \text{---} a \in N_1^m, \text{---} x \in N_p, \sup. x, \text{mp}(x, a) \in N_0 \times m$

\*7  $a \in N_0^2 + N_1^3, \text{---} p \in N_p \circ (4N_0 + 3), \sup. \text{mp}(p, a) \in 2N_0$   
 { GIRARD a.1634 p.156 }

\*8  $x \in N_p, \sup. \text{mp}[x, \text{Dvr}(a, b)] = \min[\text{mp}(x, a), \text{mp}(x, b)]$

\*9  $x \in N_p, \sup. \text{mp}[x, \text{mlt}(a, b)] = \max[\text{mp}(x, a), \text{mp}(x, b)]$

\* 2\*0  $p \in N_p, a \in N_1, \sup. \text{mp}(p, a) = \sum [E(a/p^x)] [x, N_1]$   
 $= E(a/p) + E(a/p^2) + \dots$   
 { LEGENDRE a.1830 t.1 p.11 }

\*1  $a \in N_1, \sup. a = H \{ x \nmid \text{mp}(x, a) \} [x, N_p]$

\*2  $\text{---} \text{Num}(N_1 \circ a / N_1) = H \{ \text{mp}(x, a) + 1 \} [x, N_p]$   
 { WALLIS a.1685 t.2 p.498:

Si fiat Numerus, ex continua Multiplicatione quocunque numerorum Primorum (inter se diversorum) aut quarumvis Potestatum talium Primorum: Numerus Divisorum numeri sic compositi, componitur (continua multiplicatione) ex Primorum illorum, eorumque Potestatum sic compositarum, Exponentibus, Uno, singulatim auctis. /

\*3  $a \in \text{Cls } N_1, \text{---} H, \sup. \text{Dvr } a = H \{ x \nmid \min \text{mp}(x, a) \} [x, N_p]$

\*4  $\text{---} \text{Num } a \in N_1, \sup. m a = \text{---} \max \text{---}$



§53  $\Phi$ 

$N_1 \cdots \text{Num Dvr} \ast 1. a, b \in N_1 \supset$   
 '0  $\Phi a = \text{Num} \{ 1 \cdots a \wedge x3[\text{Dvr}(x, a) = 1] \}$  Df  
 '01  $\Phi 1 = 1. \Phi 2 = 1. \Phi 3 = 2 \dots$  '02  $\Phi a \in N_1$

*Note.* Le symbole  $\Phi$  a été introduit par Gauss, a. 1801, *Werke*, t.1 p.30.

Euler, *PetrA.* t.4 II a.1780 p.18 a proposé le symbole  $\pi a$ .

Cauchy l'appelle « indicateur ».

$\Sigma$  '1  $\Sigma(\Phi, N_1 \wedge a/N_1) = a$  } GAUSS a.1801 t.1 p.31:  
 « Si  $a, a', a''$  etc. sunt omnes divisores ipsius  $A$  (unitate et ipso  $A$  non exclusis), erit  $\Phi a + \Phi a' + \Phi a'' + \text{etc.} = A$  » }

Dvr '2  $\text{Dvr}(a, b) = 1 \supset \Phi(ab) = (\Phi a)(\Phi b)$   
 '3  $\text{Dvr}(a, b) = 1 \supset (a \nmid \Phi b) \rightarrow 1 \in bN_0$

Np '4  $a \in Np \supset \Phi a = a - 1$   
 '5  $\text{---} \dots m \in N_1 \supset \Phi a^m = a^{m-1}(a-1)$

mp '6  $a \in N_1 + 1 \supset$   
 $\Phi a = H \{ [x \nmid (\text{mp}(x, a) - 1) \times (x - 1)] [x, Np \wedge a/N_1] \}$

} '2-6 EULER *PetrNC.* a.1760-61 t.8:

(p.85) ... Quoniam hic quaestio est de numeris, qui ad quempiam numerum sint primi, eoque minores, eos commode *partes ad istum numerum primas* appellare licebit.

... Si numerus propositus fuerit primus  $= p$ , numerus partium ad eum primarum est  $= p - 1$ .

Si numerus propositus sit potestas quaecumque numeri primi  $= p^n$ , numerus partium ad eum primarum erit  $= p^{n-1}(p-1)$ .

(p.86) *Theor. I.* Si sint  $A$  et  $B$  numeri inter se primi, et numerus partium ad  $A$  primarum sit  $= a$ , numerus vero partium ad  $B$  primarum sit  $= b$ ; tum numerus partium ad productum  $AB$  primarum erit  $= ab$ .

(p.88) Existentibus scilicet  $p, q, r, s$  etc. numeris primis, omnis numerus  $N$  in huiusmodi forma

$$N = p^{\lambda} q^{\mu} r^{\nu} s^{\xi}$$

comprehendetur; unde numerus partium ad  $N$  primarum erit:

$$p^{\lambda-1}(p-1).q^{\mu-1}(q-1).r^{\nu-1}(r-1).s^{\xi-1}(s-1)$$

(p.103) ... Proposito ergo numero quocumque  $N$ , cuius partium ad ipsum primarum numerus sit  $= n$ , quicumque numerus ad  $N$  primus pro  $x$  capiatur, formula  $x^n - 1$  semper erit per numerum  $N$  divisibilis. }



## §54 Nprf = (Nombre parfait)

$$N_0 \ N_1 + - \times / \uparrow > \dots \geq \min Np \ Nprf$$

$$10 \quad Nprf = N_1 \wedge \exists x [x = \sum N_1 \wedge [x / (N_1 + 1)]] \quad Df$$

La notation Nprf = (Nombre parfait) = *τελειος ἀριθμός* a été introduite par M. Nassò RdM. a.1909 p.52, qui a écrit les P.1-1. M. C. Ciambrellini a ajouté les P.5.

$$11 \quad m \in \{2, 3, 5, 7, 13, 17, 19, 31, 61\} \Rightarrow 2^{m-1}(2^m - 1) \in Nprf$$

$$12 \quad m, 2^m - 1 \in Np \Rightarrow 2^{m-1}(2^m - 1) \in Nprf \quad \{ \text{EUCLIDES IX P36} \}$$

$$13 \quad a \in Nprf \wedge 2N_1 \Rightarrow \exists N_1 \wedge m \exists [a = 2^{m-1}(2^m - 1)]$$

\{ DESCARTES Œuvres a.1638 t.2 p.429 \}

$$14 \quad m \in N_1 \Rightarrow \neg \exists Np^m \wedge Nprf$$

$$Nprf \wedge 2N_1 \supset 10N_0 + 6 \vee 100N_0 + 28$$

$$Nprf \wedge 2N_1 - 16 \supset 9N_1 + 1$$

$$Nprf \wedge 2N_1 - 128 \supset (7N_1 + 1) \vee (7N_1 - 1)$$

$$Nprf \wedge (10N_1 + 6) \supset 45N_1 + 1$$

$$Nprf \wedge (10N_1 + 8) \supset 30N_1 - 2$$

$$a \in Nprf \wedge (10N_1 + 8) \Rightarrow \exists x \neg^2 a \in 9N_0$$

$$Nprf \wedge 496 + 2N_1 \supset (100N_1 + 16) \vee (100N_1 + 28) \vee$$

$$(100N_1 + 36) \vee (100N_1 + 56) \vee (100N_1 + 76)$$

$$a \in Nprf \Rightarrow \sum [N_1 \wedge (a - N_1)] = 2$$

$$15 \quad \neg \exists Nprf \wedge N_1^2 \quad \neg \exists Nprf \wedge (105N_1)$$

$$a \in Nprf \wedge (2N_1) \Rightarrow 8a + 1 \in N_1^2$$

On ne connaît pas des  $Nprf \wedge 2N_1 + 1$ .

$$a \in Nprf \wedge (2N_1 + 1) \Rightarrow \exists m, p \exists [m \in N_0, p \in Np \wedge (4N_1 + 1) \cdot$$

$$a = p^{m-1} \times (2N_1 + 1)^2] \quad \{ \text{LIONNET AnnX. a.1879 p.306} \}$$

$$a, b \in Np \wedge (2N_1 + 1), m, n \in N_1 \Rightarrow a^m b^n \neg \in Nprf$$

$$a, b, c \in Np \wedge (2N_1 + 1), m, n, p \in N_1 \Rightarrow a^m b^n c^p \neg \in Nprf$$

§60  $\vartheta =$  (fraction propre)

- $R < \cdot 0 \quad \vartheta = R \wedge x \exists (x < 1)$  Df
- $\cdot 01 \quad R \cdot N_1 = N_0 + \vartheta \quad \cdot \quad 1 - \vartheta = \vartheta \quad \cdot \quad \vartheta = R \wedge (1 - R)$
- $\cdot 1 \quad \vartheta \times \vartheta = \vartheta$
- [  $x, y \varepsilon \vartheta \quad \cdot \quad x < 1 \quad \cdot \quad y < 1 \quad \cdot \quad xy < 1 \quad \cdot \quad \vartheta \vartheta \supset \vartheta$  (1)  
 $x \varepsilon \vartheta \quad \cdot \quad x < (x+1)/2 < 1 \quad \cdot \quad x \varepsilon \vartheta \vartheta$  (2)  $\cdot \quad (1) \quad \cdot \quad (2) \quad \cdot \quad P \quad ]$
- $\cdot 11 \quad \vartheta N_1 = \vartheta R = R \quad \cdot \quad R = \vartheta \vee \vartheta / \vartheta \vee 1 \quad \cdot \quad R = \vartheta / \vartheta$
- $a, b \varepsilon R \quad \cdot \quad \cdot 2 \quad b < a \quad \cdot \quad b \varepsilon \vartheta a$
- $\cdot 3 \quad \vartheta a = R \wedge x \exists (x < a) = R \wedge (a - R)$
- $\cdot 4 \quad \vartheta a \supset \vartheta b \quad \cdot \quad a \leq b$  [  $H_p \quad \cdot \quad b - \varepsilon \vartheta b \quad \cdot \quad b - \varepsilon \vartheta a \quad \cdot \quad a < a \quad \cdot \quad \text{Ths} \quad ]$
- $\cdot 5 \quad \vartheta a = \vartheta b \quad \cdot \quad a = b$  [  $H_p \quad \cdot \quad P \cdot 1 \quad \cdot \quad a \leq b \quad \cdot \quad b \leq a \quad \cdot \quad \text{Ths} \quad ]$
- $\cdot 6 \quad \vartheta(a+b) = \vartheta a + \vartheta b$
- [  $\S < P2 \cdot 02 \quad \cdot \quad \vartheta(a+b) \supset \vartheta a + \vartheta b$  (1)  
 $x \varepsilon \vartheta a \quad \cdot \quad y \varepsilon \vartheta b \quad \cdot \quad x < a \quad \cdot \quad y < b \quad \cdot \quad x+y < a+b \quad \cdot \quad x+y \varepsilon \vartheta(a+b)$  (2)  
 $(2) \quad \cdot \quad \vartheta a + \vartheta b \supset \vartheta(a+b)$  (3)  
 $(1) \quad \cdot \quad (3) \quad \cdot \quad P \quad ]$
- $\cdot 7 \quad \vartheta(a \times b) = (\vartheta a) \times (\vartheta b)$  [  $P \cdot 1 \supset P$  ]
- $a, r \varepsilon \text{Cls}'R \quad \cdot \quad \cdot 8 \quad \vartheta(a+r) = \vartheta a + \vartheta r$
- [  $\S < P3 \cdot 02 \quad \cdot \quad \vartheta(a+r) \supset \vartheta a + \vartheta r$  (1)  
 $x \varepsilon a \quad \cdot \quad y \varepsilon r \quad \cdot \quad z \varepsilon \vartheta x + \vartheta y \quad \cdot \quad P \cdot 25 \quad \cdot \quad z \varepsilon \vartheta(x+y) \quad \cdot \quad z \varepsilon \vartheta(a+r)$  (2)  
 $(2) \quad \cdot \quad \text{Elim}(x, y) \quad \cdot \quad \vartheta a + \vartheta r \supset \vartheta(a+r)$  (3)  
 $(1) \quad \cdot \quad (3) \quad \cdot \quad P \quad ]$
- $\cdot 81 \quad \vartheta(ar) = (\vartheta a) \times (\vartheta r)$  [  $P \cdot 1 \supset P$  ]
- $\cdot 9 \quad m \varepsilon N_1 + 1 \quad \cdot \quad \vartheta(\vartheta^m) = \vartheta$
- [  $x \varepsilon R \quad \cdot \quad x < 1 \quad \cdot \quad x \nmid m < 1 \quad \cdot \quad \vartheta \nmid m \supset \vartheta$  (1)  
 $z \varepsilon R \quad \cdot \quad z < 1 \quad \cdot \quad \S \nmid P22 \cdot 2 \quad \cdot \quad (1 - z) \nmid m > 1 - mz$  (2)  
 $x \varepsilon R \quad \cdot \quad x < 1 \quad \cdot \quad z = (1 - x) / m \quad \cdot \quad z < 1 \quad \cdot \quad 1 - mz = x \quad \cdot \quad (2) \quad \cdot \quad x < (1 - z) \nmid m$  (3)  
 $x \varepsilon \vartheta \quad \cdot \quad 3 \quad \cdot \quad x \varepsilon \vartheta \quad \vartheta \nmid m$  4  $\cdot \quad (1) \quad \cdot \quad (3) \quad \cdot \quad P \quad ]$

*Note.*

Pour faciliter l'étude des nombres réels nous introduisons d'abord le signe  $\vartheta$  qui signifie « fraction propre ». En conséquence, si  $a$  est une Cls'R,  $\vartheta a$  qu'on pourrait lire « fraction propre de quelque  $a$  » a la valeur de l'expression « nombre rationnel plus petit que quelque  $a$  ».

§61.  $V' =$  limite supérieure)

$\theta \ast \text{P}0 : \theta \in \text{ClsR} : \exists \mathbf{R}^{\bullet} x y (\theta x = \theta y) \supset$

$V' \theta = \mathbf{R}^{\bullet} x y (\theta x = \theta y) =$  la limite supérieure des  $\theta$  Df

Soit donnée une classe  $\theta$  de nombres rationnels positifs. Lorsqu'il y a un nombre rationnel  $x$ , qui satisfait à la condition  $\theta x = \theta \theta$ , c'est-à-dire tel que la classe des rationnels plus petits que  $x$  coïncide avec la classe des rationnels plus petits que quelque  $\theta$ , nous désignons ce nombre par  $V'\theta$ .

1.  $\text{Hp}0 \supset V'\theta \in \mathbf{R} : \theta V'\theta = \theta$   
 [  $x, y \in \mathbf{R} : \theta x = \theta y : \theta y = \theta \theta : \S \text{P}21 \supset x = y$  ] 1

2.  $\theta \in \mathbf{R} \supset \theta = V'\theta = V'\theta$  3.  $1 = V'\theta$

4.  $\theta \in \text{ClsR} : \theta \in \mathbf{R} : \theta \theta = \theta \theta \supset \theta = V'\theta$

5.  $\text{Hp}0 : y \in \mathbf{R} \supset y < V'\theta \implies y \in \theta \theta$

$\ast \text{P}0 : \theta \in \text{ClsR} : y \in \mathbf{R} \supset y < V'\theta \implies y \in \theta \theta$  Df Voir 1-5

Par Df,  $y < V'\theta$  signifie  $y$  est plus petit que quelque  $\theta$ , même lorsque ne sont pas satisfaites les conditions de la P15.

Ainsi se présentent les limites supérieures des classes de rationnels,  $V' \text{ClsR}$ . Si  $\theta$  est une telle limite, et  $y \in \mathbf{R}$ , la relation  $y < \theta$  a signification. Par cette relation nous allons définir les autres relations et les opérations.

La fonction  $V'\theta$  est ici introduite par abstraction. Nous ne posons pas une égalité de la forme :

$\theta \in \text{ClsR} \supset V'\theta =$  expression composée par les signes précédents Df sauf le cas de la P10. Ces limites supérieures sont les nombres réels finis, ou l'infini.

L'objet  $V'\theta$ , introduit par abstraction, et la classe  $\theta \theta$ , déjà considérée, ont plusieurs propriétés communes V, P30 ; ils diffèrent par la nomenclature.

Sur les formes données par les différents Auteurs à la définition du nombre réel, voir RdM. t.6 p.123-130.

La limite supérieure d'une classe joue un rôle très important dans toute l'Analyse. Elle est appelée *obere Grenze* par Weierstrass et les analystes allemands; Darboux, a.1875 p.61 l'appelle « limite maximum »; Pringsheim, *Encyclopädie*, p. 72, propose de l'appeler « maximum idéal ». Notre dénomination qui se rencontre dans Guichemin a.1847 (voir RdM. t.6 p.137), est conforme à l'usage le plus répandu.

Mittag-Leffler donne aux mots « limite supérieure » une signification différente, sa *limsup*, coïncide avec notre *max Lim*, et l'*oberer Limes* (non *Grenze* de Pringsheim, qui regrette la nomenclature non uniforme,

L'idée de la limite supérieure est fort ancienne ; car elle est la plus simple des différentes significations du mot « limite ». Voir 1,  $\lambda$  A Lm lim.

P. ex. l'aire du cercle se présente naturellement comme la limite supérieure des aires des polygones inscrits. Voir Stifel a.1544 f.224B.

$a, b, c \in I'(\text{Cls}'R) \rightarrow$ :

- 1  $a=b \text{ .i. } R \wedge x \exists (x < a) = R \wedge x \exists (x < b)$  Df {Cfr §8 P.5}
- 2  $a \leq b \text{ .i. } \supset$  » Df { » P.4}
- 3  $a > b \text{ .i. } \neg(a \leq b)$  Df
- 31  $c > b, b > a \rightarrow c > a$  ·32  $a=b \wedge a < b \wedge a > b$

\* 3.  $u, v \in \text{Cls}'R, a \in R \rightarrow$ :

- 0  $I'u = I'v \text{ .i. } \partial u = \partial v$
- 1  $I'u = I' \partial u$
- 2  $a = I'u \text{ .i. } \partial a = \partial u$  [ P1.2 . P3.0  $\rightarrow$  P ]
- 3  $I'u \leq I'v \text{ .i. } I'v \geq I'u \text{ .i. } \partial u \supset \partial v$
- 4  $I'u < I'v \text{ .i. } I'v > I'u \text{ .i. } \exists \partial v \neg \partial u$

$\infty = (\text{l'infini})$

I' \* 4.0  $\infty = I'R$

Df

- 1  $I'N_1 = \infty$  ·2  $u \in \text{Cls}'R \rightarrow I'u \leq \infty$
- 3  $u \in \text{Cls}'R, R \supset \partial u \rightarrow I'u = \infty$
- 4  $u, v \in \text{Cls}'R, u \supset v, I'u = \infty \rightarrow I'v = \infty$
- 5 »  $\rightarrow I'(u \wedge v) = \infty \text{ .i. } I'u = \infty \wedge I'v = \infty$

On rencontre le signe  $\infty$  dans Vallis a.1655, t.1 p.297.

$l_i = (\text{limite inférieure})$

I' \* 5.  $u, v \in \text{Cls}'R, a \in R \rightarrow$  ·0  $l_i u = I'R \neg (u/\partial)$  Df

Nous définissons  $l_i u$  « la limite inférieure des  $u$  » comme la limite supérieure des  $R$  qui ne sont pas supérieurs à quelque  $u$ .

- 1  $\exists R \wedge x \exists (x/\partial = u/\partial) \rightarrow l_i u = I'R \wedge x \exists (x/\partial = u/\partial)$
- 11  $a = l_i (u/\partial) = l_i u$  ·12  $1 = l_i / \partial$
- 2  $l_i u = l_i v \text{ .i. } u/\partial = v/\partial$  ·21  $l_i u = l_i (u/\partial)$
- 3  $a = l_i u \text{ .i. } a/\partial = u/\partial$
- 4  $l_i u > l_i v \text{ .i. } \exists (v/\partial) \neg (u/\partial)$  ·41  $a > l_i u \text{ .i. } a \in u/\partial$
- 5  $l_i u \geq l_i v \text{ .i. } u/\partial \supset v/\partial$
- 6  $I'u = l_i R \neg (\partial u)$
- 7  $I'u = l_i v \text{ .i. } \partial u = R \neg (v/\partial) \text{ .i. } v/\partial = R \neg (\partial u)$

§62 Q = (quantité positive)

$R \theta \text{ I}' \quad * \quad 1^{\circ}0 \quad Q = \text{I}'[(\text{Cls}'R \wedge n3(\mathcal{A}u, \exists R \neg \theta u)] \quad \text{Df}$

*Note.* Le symbole Q qu'on peut lire « quantité positive », selon Cauchy, indique les limites supérieures des Cls de R, effectivement existantes, et telles que leur limite supérieure ne soit pas l'infini.

Les relations = et > entre Q sont définies dans §I' P2.

- 1  $u \varepsilon \text{Cls}'R, \mathcal{A}u, \exists R \neg \theta u \Rightarrow \text{I}'u \varepsilon Q \quad [\text{P}^{\circ}0 \Rightarrow \text{P}]$
- 2  $R \supset Q \quad [\S \text{I}' \text{P1}^{\circ}2 \Rightarrow \text{P}]$
- 3  $u \varepsilon \text{Cls}'R, \mathcal{A}u \Rightarrow \text{I}'u \varepsilon Q \vee t x \quad [\text{P}^{\circ}1, \S \text{I}' \text{P1}^{\circ}3 \Rightarrow \text{P}]$
- 4  $u \varepsilon \text{Cls}'Q \Rightarrow \text{I}'u = \text{I}'(R \wedge x3[\exists u \wedge y3(x < y)]) \quad \text{Df}$
- 5  $a \varepsilon Q \Rightarrow \exists R \wedge x3(x < a), \exists R \wedge x3(x > a)$

$Q_0 \theta \Theta \quad * \quad 2^{\circ}0 \quad Q_0 = Q \vee t0 \quad \text{Df}$

- 1  $\theta = Q \wedge x3(x < 1) \quad \text{Df}$
- 2  $\Theta = Q_0 \wedge x3(x \leq 1) = \theta \vee t0 \vee t1 \quad \text{Df}$
- 3  $\theta = R \wedge \theta$

$+ \quad * \quad 3. \quad a, b, c, d \varepsilon Q \Rightarrow$

- 1  $a+b = \text{I}'[R \wedge x3(x < a) + R \wedge x3(x < b)] \quad \text{Df} \quad \text{Cfr } \S \theta \text{ P}^{\circ}6\}$
- 1  $a+b \varepsilon Q$
- 2  $a+b = b+a$   
[  $R \wedge x3(x < a + R \wedge x3(x < b) = R \wedge x3(x < b) + R \wedge x3(x < a) \Rightarrow \text{P} ]$
- 3  $a+(b+c) = (a+b)+c \quad \text{4} \quad a=b \Rightarrow a+c = b+c$
- 5  $(Q \mid N_0) \S + \text{P7} \quad \text{6} \quad Q+Q = Q$
- 6  $b > a \Rightarrow b \varepsilon a+Q \quad \text{Dfp}$
- 7  $b > a \Rightarrow b+c > a+c \quad \text{71} \quad b > a, d > c \Rightarrow b+d > a+c$
- 8  $b \geq a \Rightarrow \neg(b < a) \Rightarrow b > a \vee b = a \Rightarrow b \varepsilon a+Q_0 \quad \text{Dfp}$

$- \quad * \quad 11^{\circ}0 \quad a \varepsilon Q, b \varepsilon a+Q \Rightarrow b-a = \text{I}'Q \wedge x3(a+x = b) \quad \text{Df}$   
 $\text{Hp}^{\circ}0 \Rightarrow$  1  $b-a \varepsilon Q$  2  $a+b-a = b$  3  $(Q \mid N_0) \S - 1^{\circ}3$   
 4  $1-\theta = \theta \quad \text{5} \quad 1-\Theta = \Theta$

$q \quad * \quad 12^{\circ}0 \quad q = Q \vee -Q \vee t0 \quad \} = \text{« quantité » } \} \quad \text{Df}$

$* \quad 13-16. \quad (Q, q)(N_0, n) \S n \text{ P3-6}$

$* \quad 17. \quad a, b \varepsilon q \Rightarrow$  1  $b > a \Rightarrow b \varepsilon a+Q \quad \text{Df}$

- 1-2 = P3-7-8
- 3  $b > a \Rightarrow -b < -a$



× \* 21.  $a, b, c \in Q, \supset$ :

- 0  $a \times b = \{ [R^{\wedge}, x \exists (x < a) \times R^{\wedge}, x \exists (x < b)] \}$  Df  
 ·1  $a \times b \in Q$  ,  $ab = ba$  ,  $a(bc) = (ab)c = abc$  ,  $a(b+c) = ab+ac$   
 ·2  $Q \times Q = Q$  ,  $\theta \times \theta = \theta$  ,  $(-\theta) = \theta$

\* 22.  $a, b, c, d \in Q, \supset$ :

- 1  $a > b \implies ac > bc$  ·2  $a > b, c > d \supset, ac > bd$   
 ·3  $a > b, c > d \supset, ac+bd > ad+bc$

\* 23·0  $a \in \text{Cls}'Q, a \in Q, \supset$ :  $a = \{a\} \implies, \{a\} = \{a\}$  Dfp

- 1  $a, c \in \text{Cls}'Q, \{a\}, \{c\} \in Q, \supset, \{a\} \times \{c\} = \{a\} \times \{c\}$   
 $\{a\} \{a\} = aa, \{a\} \{c\} = ac, \supset, a \{a\} \{c\} = aac, \supset, P$   
 ·2  $a \in Q, \supset, a \times x = x \times a = x \times x = x$  Df  
 ·3  $a, c \in \text{Cls}'Q, \exists a, \exists c, \supset, \{a\} \times \{c\} = \{a\} \times \{c\}, \{a\} \times \{c\} = \{a\} \times \{c\}$

× q \* 25-27  $\vdash (Q_0, q) \vdash (N_0, n) \S \times P5-7$

28·1  $a, b \in q, b > a, c \in q, \supset, bc > ac$

29·0  $a \in Q, \supset, a \times (-x) = (-x) \times a = -x$  Df

·1  $a \in \text{Cls}'q, \exists a, m \in Q, \supset, \{a\} \{m\} = m \{a\}, \{a\} \{m\} = m \{a\}$

/ \* 30.  $a, b \in Q, \supset, \cdot 0 \not/a = 1 \wedge \{a\} \times \{a\} \times a = 1$  Df

·1  $\not/a \in Q$  ·2  $\not/(a) = a$  ·3  $\not/(ab) = (\not/a)(\not/b)$

·4  $b/a = b \times (a)$  Df

·5  $a=b \implies, \not/a = \not/b \implies, a/b = 1$

·6  $x \in Q, a, x = b \implies, x = b/a$  ·7  $\not/Q = Q$

·8  $a \in \text{Cls}'Q, \{a\} \in Q, \supset, \{a\} \not/a = \not/a$

·9  $\text{-----} = \text{-----} = 0$

\* 31.  $(Q, q) \vdash (R, r) \S / P17-37-40-42$

⌋ \* 41.  $a, b \in Q, m, n \in N_0, \supset, \cdot 0 a^m = 1[(\times a)]^m$  Df

·01  $a^0 = 1, a^1 = a$  ·1  $a \in Q$  ·2  $a^m a^n = a^{m+n}$

·3  $(ab)^m = a^m b^m$  ·4  $(a^m)^n = a^{m \times n}$

·4  $a \in Q, m \in N_1, \supset, a^m = \{a\}[(R^{\wedge}, x \exists (x < a)]^m \}$  Dfp

·5  $a \in \text{Cls}'Q, \{a\} \in Q, m \in N_1, \supset, \{a\}^m = \{a\}^m$

·6  $\text{-----} = x \text{-----} = x$

·7  $m \in N_1, \supset, Q^m = Q$  ,  $\theta^m = \theta$  ,  $(-\theta)^m = \theta$

\* 42.  $(Q \mid N_0) \S \vdash P2-3-5-6-9-14-16$

\* 51.  $a \varepsilon Q . b, c \varepsilon q . \supset$ .

·1  $b^2 - 4ac \leq 0 . x \varepsilon q . \supset . ax^2 + bx + c \leq 0$

·2  $b^2 - 4ac > 0 . \supset . \exists q (x^2(ax^2 + bx + c < 0))$

·3 —————  $\supset . \exists r$  ————— Ex. §vet 9·3

\* 52·0  $a \varepsilon Q . m \varepsilon N_1 . \supset . a^{-m} = / (a^m)$

Df

$a, b \varepsilon Q . m, n \varepsilon N . \supset .$  ·1  $a^m \varepsilon Q$  ·2·4 = P41·2·4

·5  $a^{-m} = / (a^m) = (/a)^m$

↓ \* 53.  $a \varepsilon Q . m, n, p, q \varepsilon N_1 . \supset$ .

·0  ${}^m\sqrt{a} = r \text{ Q} x^3 (x^m = a) . \sqrt{a} = {}^2\sqrt{a} . a \nmid m = {}^m\sqrt{a} \quad \text{Df}$

·1  ${}^m\sqrt{a} \varepsilon Q$  ·2  ${}^m\sqrt{(a^m)} = a$  ·3  ${}^1\sqrt{a} = a$  ·4  ${}^m\sqrt{ab} = ({}^m\sqrt{a})({}^m\sqrt{b})$

·5  ${}^m\sqrt{/a} = / {}^m\sqrt{a}$  ·6  ${}^m\sqrt{(a^n)} = ({}^m\sqrt{a})^n$  ·7  ${}^n\sqrt{({}^m\sqrt{a})} = {}^{mn}\sqrt{a}$

·8  ${}^{m \cdot p}\sqrt{a^{n \cdot q}} = {}^m\sqrt{a^n}$  ·9  $m/n = p/q . \supset . {}^m\sqrt{a^n} = {}^p\sqrt{a^q}$

{ CHUQUET f.47: « autant vault R<sup>2</sup>.6 comme R<sup>6</sup>.216 ».

» f.48: « R<sup>6</sup>.13 qui vault comre R<sup>3</sup>.R<sup>3</sup>.13 ».

Le signe de racine a eu les formes R, r,  $\sqrt{\phantom{x}}$ . Puisque toute racine est une puissance fractionnaire (P60), nous ne considérons pas le signe  $\sqrt{\phantom{x}}$  comme fondamental, et servant à classer les propositions.

La considération des exposants négatifs et fractionnaires est attribuée à Oresme (a. 1323–1382) par M. Cantor, t.2, p.133. On la rencontre dans Girard a.1629 fol.B2: « multipliez  $\sqrt{5}$  par re4 viendra  $(\frac{1}{6})^{2000}$  ». On remarquera ici que les parenthèses indiquent l'élévation à puissance. Voir aussi: Newton, 13 Junii 1676: §lim P23.

\* 54.  $a, b, c, d \varepsilon R . \supset$ :

·1  $a + \sqrt{b} = \sqrt{c} . \supset . b \varepsilon R^2 . c \varepsilon R^2$

{ EUCLIDES X P26: Μέσων μέσων οὐχ ὑπερέχει ἐνητῶ. }

·2  $b = \varepsilon R^2 . a + \sqrt{b} = c + \sqrt{d} . \supset . a = c . b = d$

·3  $a/b = \varepsilon R^2 . a > b . c > d . \sqrt{a} + \sqrt{b} = \sqrt{c} + \sqrt{d} . \supset . a = c . b = d$

{ ·2·3 EUCLIDES X P42:

Ἡ ἐκ δύο ὁρομάτων κατὰ ἓν μέτρον σημειῶν διατρέπεται εἰς τὰ ὀνόματα. }

·4  $a/b = \varepsilon R^2 . \sqrt{a} - \sqrt{b} = \sqrt{c} - \sqrt{d} . \supset . a = c . b = d$

{ EUCLIDES X P79: Τῇ ἀποτομῇ μία προσαρμόζει ἐνθεῖα ῥητὴ δυνάμει μέτρον σύμμετρος οὕσα τῇ ἑλῇ. }

·5 »  $\supset . \sqrt{a} + \sqrt{b} = \sqrt{c} - \sqrt{d}$  { EUCLIDES X P111:

Ἡ ἀποτομὴ οὐκ ἔστιν ἢ ἀπὲρ τῇ τῇ ἐκ δύο ὁρομάτων. }

·6  $a, b \varepsilon Q . \supset . \sqrt{a+b} < \sqrt{a} + \sqrt{b} . (a+b)/2 \leq \sqrt{ab}$





$$\begin{aligned} \cdot 3 \quad a, b \in \mathbb{Q} \supset a(a-b) &= b^2 \implies b = a(\sqrt{5}-1)/2 \implies a = b(\sqrt{5}+1)/2 \implies \\ a^2 + (a-b)^2 &= 3b^2 \implies b(a+b) = a^2 \implies a-b = a(3-\sqrt{5})/2 \\ &\} \text{EUCLIDES XIII P1-6} \} \end{aligned}$$

Ces formules correspondent à la division de  $a$  en « moyenne et extrême raison » « ἄκρον καὶ μέσων λόγος ».

$$\ast \quad 57. \quad a, b, x, y \in \mathbb{Q} \supset:$$

$$\begin{aligned} \cdot 1 \quad x+y &= 2a \quad , \quad xy = b \implies x+y = 2a \quad , \quad (x+y)^2 - 4xy = 4(a^2-b) \\ &\implies \quad \quad \quad (x-y)^2 = 4(a^2-b) \\ &\implies \quad \quad \quad x-y = \pm 2\sqrt{a^2-b} \\ &\implies x = a + \sqrt{a^2-b} \quad , \quad y = a - \sqrt{a^2-b} \quad \text{ou} \\ &\quad \quad \quad x = a - \quad \quad \quad y = a + \quad \quad \quad \\ &\} \text{DIOPHANTUS I P27, 30} \} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cdot 2 \quad x+y &= a \quad , \quad x^2+y^2 = b^2 \implies x+y = a \quad , \quad x-y = \pm \sqrt{2b^2-a^2} \\ &\} \text{DIOPHANTUS I P28} \} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cdot 3 \quad x^2+y^2 &= a \quad , \quad xy = b \implies x+y = \pm \sqrt{a+2b} \quad , \quad x-y = \pm \sqrt{a-2b} \\ &\} \text{BACHET, } \textit{Commentaria in Diophantum}, \text{I, 33 questio I.} \} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cdot 4 \quad x^3+y^3 &= a \quad , \quad x+y = b \implies x+y = b \quad , \quad 3bx-y^2 = 4a-8b^3 \\ &\} \text{DIOPHANTUS IV P1} \} \end{aligned}$$

$$\cdot 5 \quad x^4+y^4 = a \quad , \quad x+y = b \implies x+y = b \quad , \quad 2xy^2-4b^2xy+b^4-a=0$$

$$\cdot 6 \quad x^5+y^5 = a \quad , \quad x+y = b \implies x+y = b \quad , \quad 5bxy(b^2-xy) = b^5-a$$

$$\ast \quad 58.1 \quad a, b, u, r \in \mathbb{Q} \quad , \quad u+r = b \quad , \quad ur = (a/3)^2 \supset:$$

$$x \in \mathbb{Q} \quad , \quad x^3 = ax + b \implies x = \sqrt[3]{u} + \sqrt[3]{r} \quad \quad \quad [\S \text{ P2-11 } \supset \text{ P}]$$

$$\} \text{N. TARTAGLIA a.1546 p.123:}$$

... Quando che'l cubo restasse lui solo  $[x^3 = ax + b]$

Tu osseruuarai quest'altri contratti.

Del numer farai due tal part'a volo  $[b = u+r]$

Che l'una in l'altra si produca schietto

El terzo cubo delle cose in stolo.  $[ur = (a/3)^3]$

Delle qual poi, per commun precetto

Torrai li lati cubi insieme gionti

Et cotal summa sarà il tuo concetto.  $[x = \sqrt[3]{u} + \sqrt[3]{r}]$

... Questi trovai, et non con passi tardi

Nel mille cinquecent'e quatro e trenta

Con fondamenti ben sald'e gagliardi

Nella città dal mar'intorno centa.}

$a, b \in \mathbb{Q} \text{ , } \supset \text{ , } \cdot 2 \quad b^2 + a^3 > 0 \text{ , } \supset \text{ :}$   
 $x \in \mathbb{Q} \text{ , } x^3 + 3ax + 2b = 0 \text{ , } \text{ , } \text{ , } x = \sqrt[3]{\| -b + \sqrt{(b^2 + a^3)} + \sqrt[3]{\| -b - \sqrt{(b^2 + a^3)} \|}$   
 $\cdot 3 \quad b^2 + a^3 = 0 \text{ , } \supset \text{ , } \sqrt[3]{a} \wedge x3(x^3 + 3ax + 2b = 0) = \sqrt[3]{b} \vee a = 2 \sqrt[3]{b}$   
 $\cdot 4 \quad b^2 + a^3 < 0 \text{ , } \supset \text{ , } \text{Num}[\sqrt[3]{a} \wedge x3(x^3 + 3ax + 2b = 0)] = 3$

Continuation § sin P10.1

\* 60.01  $a \in \mathbb{Q} \text{ , } m \in \mathbb{R} \text{ , } \supset \text{ ,}$   
 $a \nmid m = 1 \vee \exists [p, q \in \mathbb{N}_1 \text{ , } m = p/q \text{ , } \supset p, q \text{ , } \eta = \sqrt[3]{a \nmid p \nmid q}] \quad \text{Df}$   
 $\cdot 02 \quad a \in 1 + \mathbb{Q} \text{ , } m \in \mathbb{Q} \text{ , } \supset \text{ , } a \nmid m = \sqrt[3]{a \nmid \mathbb{R} \wedge x3(x < m)} \} \quad \text{Df}$   
 $\cdot 03 \quad a \in \theta \text{ , } \text{-----} \quad \sqrt[3]{\text{-----}} \quad \text{Df}$   
 $\cdot 04 \quad a^{-m} = (a^m) \quad \text{Df}$

$a, b, c \in \mathbb{Q} \text{ , } m, n \in \mathbb{Q} \text{ , } \supset \text{ , } 1^m = 1 \text{ , } a \nmid m \in \mathbb{Q} \text{ , } \text{P41.2-4}$   
 $\cdot 5 \quad a > b \text{ , } \text{ , } a' > b' \quad \cdot 6 \quad a > 1 \text{ , } \supset \text{ : } m > n \text{ , } \text{ , } a^m > a^n$   
 $\cdot 7 \quad a < 1 \text{ , } \supset \text{ : } m > n \text{ , } \text{ , } a^m < a^n$

\* 61.  $m, n, x, y \in \mathbb{Q} \text{ , } x = y \text{ , } \supset \text{ ,}$   
 $\cdot 1 \quad x^m y^n < [(m \cdot x + n \cdot y) / (m + n)]^{m+n}$   
 $\cdot 2 \quad (1 + 1/m)^m < (1 + 1/(m+n))^{m+n} \quad [ (1 + 1/m, 1 - x, y \text{ P.1 } \supset \text{ , } \text{P } ]$   
 $\cdot 3 \quad m < n \text{ , } \supset \text{ , } (1 + 1/m)^m < (1 + 1/n)^n \quad [ n - m, n \text{ P.2 } \supset \text{ , } \text{P } ]$   
 $\cdot 4 \quad m < n \text{ , } \supset \text{ , } (1 + x/m)^m < (1 + x/n)^n$   
 $[ (m/x, n/x) \wedge (m, n \text{ P.3 } \supset \text{ , } \text{P } ] \quad [ \text{P.4 } , x = 1 \text{ , } \supset \text{ , } \text{P.3 } ]$   
 $\cdot 5 \quad m < 1 \text{ , } \supset \text{ , } (1 + x)^m < 1 + m \cdot x \quad [ (m \cdot x, 1 - x, n \text{ P.4 } \supset \text{ , } \text{P } ]$   
 $\cdot 6 \quad m > 1 \text{ , } \supset \text{ , } (1 + x)^m > 1 + m \cdot x \quad [ 1, m, m \cdot x \wedge (m, n, x \text{ P.4 } \supset \text{ , } \text{P } ]$   
 $\text{DemP.5 } [ (1/m, m \cdot x) \wedge (m, x \text{ P.6 } \supset \text{ , } \text{P.5 } ]$   
 $\text{DemP.4 } [ (n/m, x/n) \wedge (m, x \text{ P.6 } \supset \text{ , } \text{P.4 } ]$   
 $\cdot 7 \quad (1 + 1/m)^m < (1 + 1/n)^{n+1}$   
 $[ [(n+1, (m+1)/m, n/(n+1)) \wedge (n, x, y \text{ P.1 } \supset \text{ , } \text{P } ] \quad \text{Ex : } \S e$

Num Q \* 70.1 Num Q > Num N<sub>0</sub>  
 $\cdot 2 \quad a \in \text{Cls}' \mathbb{Q} \text{ , } \text{Num } a = \text{Num } N_0 \text{ , } a, b \in \mathbb{Q} \text{ , } a < b \text{ , } \supset \text{ , } \exists (a^+ - b) = a$   
 $\} \text{ G. CANTOR JfM. a.1874 p.258 ; AM. a.1883 p.308 } \}$   
 $\cdot 3 \quad \text{Num } Q = \text{Num } q = \text{Num } \theta = \text{Num } (\theta \text{--R})$   
 $\} \text{ G. CANTOR JfM. a.1877 p.242 ; AM. a.1883 p.316 } \}$

$\Sigma \Pi \vdash \text{C } (\mathbb{Q}, \mathbb{Q}) \mid (\mathbb{R}, \mathbb{R}) \S \Sigma \text{ P1. 6. 20. } \S \Pi \text{ P1. 2. 5.1 10. } \S !$

mod \* 80.  $a, b \in \mathbb{Q} \text{ , } \supset \text{ ,}$   
 $\cdot 0 \quad \text{mod } a = 1 \vee \mathbb{Q}_0 \wedge x3(a = +x \text{ , } \text{ , } a = -x)$   
 $\cdot 1 \quad \text{mod } a \in \mathbb{Q}_0 \quad \cdot 2 \quad \text{mod } (a + b) \leq \text{mod } a + \text{mod } b$   
 $\cdot 3 \quad \text{mod } (-a) = \text{mod } a \quad \cdot 4 \quad \text{mod } (a \times b) = \text{mod } a \times \text{mod } b$

- 5  $a \equiv 0 \Rightarrow \bigcup \text{mod}/a = / \text{mod} a$   
 ·6  $m \in N_1 \Rightarrow \text{mod}(a^m) = (\text{mod} a)^m$  ·7  $\text{mod} a = \downarrow a^2$   
 ·8  $m \in N_1, f \in \text{qF1}^{\dots m} \Rightarrow \text{mod} \Sigma f \leq \Sigma \text{mod} f$   
 ·9  $\text{mod} Hf = H \text{mod} f$

sgn \* 81.  $(Q, q) | (R, r) \S \text{sgn P} \cdot 0 \cdot 8$

max min \* 82.  $(Q | R) \S \text{max P} \cdot 3 \cdot 4 \cdot 6$

$u, v \in \text{Cls}' Q \Rightarrow$

- 7  $\exists t \max u \Rightarrow \max u = I' u$  ·71  $I' u \in u \Rightarrow I' u = \max u$   
 ·8  $I' u, I' v \in Q \Rightarrow I'(u \cup v) = \max(I' u \cup I' v)$

\* 83.  $u, v \in \text{Cls}' q, a, b \in q \Rightarrow$

- 0  $\max u = I' u \wedge \exists y (y \in u \Rightarrow y \leq x) \Rightarrow y. y \leq x) \quad \text{Df}$   
 ·01  $\min u = \text{---} \Rightarrow x) \quad \text{Df}$

$\exists t \max u, \exists t \max v \Rightarrow$  ·1  $\max(u \cup v) = \max(t \max u \cup t \max v)$

- 2  $\max(u + v) = \max u + \max v$

- 11-22  $(\min | \max) \text{P} \cdot 1 \cdot 2$  ·3  $\min(-u) = -\max u$

- 5  $a \in Q, b, c \in q \Rightarrow \min[(ax^2 + bx + c) | x \in q] =$   
 $[(ax^2 + bx + c) | x] [-b/(2a)] = (4ac - b^2)/(4a)$

- 6  $\text{Num} u \in N_1 \Rightarrow \exists t \max u, \exists t \min u$

- 7  $u \in \text{Cls}' (q \cup t x \cup t -x) \Rightarrow \text{P} \cdot 0$

- 8  $\exists t \max u \Rightarrow \max u = I' u : \exists t \min u \Rightarrow \min u = I_1 u$

- 81  $I' u \in u \Rightarrow I' u = \max u : I_1 u \in u \Rightarrow I_1 u = \min u$

- 9  $I' u, I' v \in q \Rightarrow I'(u \cup v) = \max(I' u \cup I' v)$

- 91  $I_1 u, I_1 v \in q \Rightarrow I_1(u \cup v) = \min(I_1 u \cup I_1 v)$

E β 84.  $(q | r) \S E \S \beta$

- 1  $x \in Q \Rightarrow x \in R \Rightarrow \exists N_1 \wedge \exists n \exists [(/\beta)^n x \in N_1] \quad \{ \text{EUCLIDES X P2:}$

*Ἐὰν δύο μεγέθων ἀρίστων ἀντιγραφόμενον αἰεὶ τοῦ ἐλάσσονος ἀπὸ τοῦ μείζονος τὸ καταλείπόμενον μηδέποτε καταμετρήῃ τὸ πρὸς ἑαυτοῦ, ἀσύμμετρα ἔσται τὰ μεγέθη. \}*

- 2  $x \in Q \Rightarrow x \in R \pm \downarrow R \Rightarrow$

$\exists (m, n) \exists m, n \in N_1 : p \in m + N_1 \Rightarrow_p E(/ \beta)^p x = E(/ \beta)^{p+a} x$   
 $\{ \text{EULER a.1737 PetrC. t.9 p.98} \}$

$(/\beta)^n x$  est le «  $n$ -ième quotient complet du développement de  $x$  en fraction continue » ;  $E/\beta^n x$  est le  $n$ -ième quotient incomplet.

Les Df de Log, Med,  $\lambda$ , cres,  $q_n$  sont composées par les seuls signes précédents.

## §63 Log

$\vdash q \rightarrow a, b \in Q \rightarrow 1 \cdot x, y \in Q \cdot m \in q \rightarrow \cdot \supset.$

·0  ${}^a\text{Log} x = 1 \text{ q} \wedge z \in a \wedge z = x$  Df

·1  ${}^a\text{Log} x \in q$  ·2  $a \wedge {}^a\text{Log} x = x$

·21  ${}^a\text{Log}(a \wedge m) = m$  ·22  ${}^a\text{Log} 1 = 0$  ·23  ${}^a\text{Log} a = 1$

·3  ${}^a\text{Log}(xy) = {}^a\text{Log} x + {}^a\text{Log} y$

[ P·2  $\cdot \supset \cdot {}^a\text{Log}(xy) = {}^a\text{Log}[a \wedge ({}^a\text{Log} x) \times a \wedge ({}^a\text{Log} y)]$

§Q 60·2 ·  $= {}^a\text{Log}[a \wedge ({}^a\text{Log} x + {}^a\text{Log} y)]$

P·21 ·  $= {}^a\text{Log} x + {}^a\text{Log} y$  ]

·4  ${}^a\text{Log}/x = - {}^a\text{Log} x$

[  ${}^a\text{Log}/x = {}^a\text{Log}[a \wedge ({}^a\text{Log} x)] = {}^a\text{Log}[a \wedge - {}^a\text{Log} x] = - {}^a\text{Log} x$  ]

·5  ${}^a\text{Log} x^m = m \times {}^a\text{Log} x$

[  ${}^a\text{Log}(x^m) = {}^a\text{Log}[a \wedge ({}^a\text{Log} x)^m] = {}^a\text{Log}[a \wedge m \times ({}^a\text{Log} x)] = m \times {}^a\text{Log} x$  ]

·6  ${}^a\text{Log} b \times {}^b\text{Log} a = 1$  ·7  ${}^a\text{Log} x = {}^b\text{Log} x \times {}^a\text{Log} b$

{ NEPERUS a.1614 p.20:

« Ex his praelibatis judicent eruditi quantum emolumenti adferent illis logarithmii: quandoquidem per eorum additionem multiplicatio, per subtractionem divisio, per bipartitionem extractio quadrata, per tripartitionem cubica, et per alias faciles prostaphaereses omnia graviora calculi opera evitantur. » {

*Note.* Soit  $a$  une raison; Euclide appelle  $a^2, a^3 \dots$  la raison doublée, triplée... διπλασίον, τριπλασίον... λόγος.

Dans  $a^n$ ,  $n$  est l'exposant de la raison, λόγον ἀριθμός; d'où le mot « logarithmus », introduit par Neper. Les logarithmes de Neper sont liés aux logarithmes naturels par la relation:

$$\log_{\text{nep}} x = -10^7 \log(10^{-7} x),$$

c'est-à-dire il n'a pas écrit notre virgule décimale; mais les chiffres sont les mêmes.



$$\cdot 5 \quad \sqrt[n]{\Pi(a, 1 \cdots n)} \in \text{Med } w(1 \cdots n)$$

$$\cdot 6 \quad \Pi(a \nmid b, 1 \cdots n) \nmid \Sigma(b, 1 \cdots n) \in \text{Med } w(1 \cdots n) \\ \} \text{P1-6 CAUCHY a.1821 p.29 \}$$

$$\cdot 7 \quad \sqrt[\Sigma(a^2, 1 \cdots n/n)]{} \in \text{Med } w(1 \cdots n) \quad \} \text{CAUCHY a.1821 p.371 \}$$

Le premier membre de la P1 est la « moyenne arithmétique des valeurs de  $x \in \mathcal{A}$ . Dans la P2 ces valeurs ont des coefficients  $a$ . Dans les P5-6 figure la « moyenne géométrique », et dans la P7 la « moyenne quadratique ».

$$\text{Log} \ast 4. \quad u \in \text{Q-cl}, u \in \text{Cls'Q} \supset, \text{Med } \text{Log } u = \text{Log Med } u \\ \} \text{CAUCHY a.1821 p.367 \}$$

Continuation : §2 P2-9 §3 res 92 §5 P1-0 3-5 §4 P5 33-42.

$$\S 65 \quad \lambda = (\text{classe limite})$$

$$- \text{mod } 1, \ast 1. \quad u, v \in \text{Cls'Q} \supset,$$

$$\cdot 0 \quad \lambda u = \text{q} \wedge x \nmid [1, \text{mod}(u-x) = 0] \quad \text{Df} \quad \cdot 1$$

$$\cdot 01 \quad x \in \lambda u :=: x \in \text{q} : h \varepsilon \text{Q} \supset h, \exists u \wedge y \nmid [\text{mod}(y-x) < h] \quad [ = \text{P} \cdot 0]$$

P1-0 Soit  $u$  une classe de quantités. Par  $\lambda u$  nous désignons la classe des nombres  $x$  tels que la limite inférieure des modules des différences entre  $x$  et les nombres de la classe  $u$  soit nulle. La P01 exprime la même Df, où le signe 1 est remplacé par sa valeur. La classe  $\lambda u$ , qu'on peut lire « les limites des  $u$  », ou « la classe limite des  $u$  » a été indiquée dans F1895 et dans plusieurs autres travaux par  $\ell u$ .

$$\cdot 1 \quad u \supset \lambda u \\ [ x \varepsilon u \supset, 0 \varepsilon u-x \supset, 0 \varepsilon \text{mod}(u-x) \supset, 1 \text{mod}(u-x) = 0 \supset, x \varepsilon \lambda u ]$$

$$\cdot 2 \quad \lambda \lambda u = \lambda u \\ [ (\lambda u \mid u) \text{P} \cdot 1 \supset, \lambda u \supset \lambda \lambda u \quad (1)$$

$$x \varepsilon \lambda \lambda u : h \varepsilon \text{Q} : \text{P} \cdot 01 \supset, \exists \lambda u \wedge y \nmid [\text{mod}(y-x) < h/2] \quad (2)$$

$$\text{Hp } 2) : y \varepsilon \lambda u \supset, \exists u \wedge z \nmid [\text{mod}(z-y) < h/2] \quad (3)$$

$$\text{Hp } 3) : \text{mod}(y-x) < h/2 : z \varepsilon u : \text{mod}(z-y) < h/2 \supset, \text{mod}(z-x) < h \quad (4)$$

$$\text{Hp } 4) \supset, \exists u \wedge z \nmid [\text{mod}(z-x) < h] \quad (5)$$

$$x \varepsilon \lambda \lambda u : h \varepsilon \text{Q} : (5) \text{Elim } y, z) : (2), (3) \supset, \exists u \wedge z \nmid [\text{mod}(z-x) < h] \quad (6)$$

$$x \varepsilon \lambda \lambda u : (6) \text{Export} \supset, x \varepsilon \lambda u \quad (7)$$

$$1 \wedge 7) \supset, \text{P} \cdot 1]$$

$$\cdot 3 \quad \lambda(u \cup v) = (\lambda u \cup \lambda v) \quad \} \text{Distrib}(\lambda, \cup) \{$$

$$[ \text{Df } \lambda \quad \supset, \lambda(u \cup v) = \text{q} \wedge x \nmid [1, \text{mod}[(u \cup v) - x] = 0]$$

$$\text{Distrib } \cup \supset, \ast = \text{q} \wedge x \nmid [1, [\text{mod}(u-x) \cup \text{mod}(v-x)] = 0]$$

$$\S \text{Q } 18-7 \quad \supset, \ast = \text{q} \wedge x \nmid [1, \text{mod}(u-x) = 0 \cup, 1, \text{mod}(v-x) = 0]$$

$$\text{Df } \lambda \quad \supset, \ast = \lambda u \cup \lambda v ]$$

$$\cdot 31 \quad u \supset v \supset, \lambda u \supset \lambda v$$

$$[ \text{Hp} : \S \text{P} 2-4 \supset, v = u \cup v : \text{P} \cdot 3 \supset, \lambda v = \lambda u \cup \lambda v \supset, \text{Ths} ]$$

- $\cdot 32 \quad \lambda(u \cap v) \supset \lambda u \cap \lambda v$   
 $[ u \cap v \supset u, u \cap v \supset v, P \cdot 31 \supset, \lambda(u \cap v) \supset \lambda u, \lambda(u \cap v) \supset \lambda v, \text{Cmp} \supset, P ]$   
 $\cdot 33 \quad \lambda u = u, \lambda v = v \supset, \lambda(u \cap v) = u \cap v$   
 $[ \text{Hp}, P \cdot 32, P \cdot 1 \supset, \lambda(u \cap v) \supset u \cap v, u \cap v \supset \lambda(u \cap v) \supset, \text{Ths} ]$   
 $\cdot 4 \quad \lambda R = Q_0, \lambda r = q, \lambda \vartheta = \lambda \theta = \theta$   
 $\cdot 5 \quad \lambda / N_1 = / N_1 \cup \iota 0, \lambda / N_1 + / N_1 = (N_1 + / N_1) \cup \iota 0$   
 $\cdot 6 \quad a, b \varepsilon Q, a < b \supset, \lambda(a - b) = a \neg b$   
**\*** 2.  $u, r \varepsilon \text{Cls}'q \supset$ :  
 $+ \cdot 1 \quad \lambda u + \lambda r \supset \lambda(u + r) \quad \{ \text{Distrib}(\lambda, +) \}$   
 $[ \S \vdash P7 \cdot 3 \supset, a \varepsilon \lambda u + \lambda r \implies [a] b; c \varepsilon (b \varepsilon \lambda u, c \varepsilon \lambda r, b + c = a)$   
 $\text{Df } \lambda \supset, \implies [1, m(u - b = 0, 1, m(r - c) = 0, b + c = a]$   
 $\S Q \text{ P18} \cdot 31 \supset, \supset, \implies [1, \text{mod}(u + v - b - c) = 0, b + c = a]$   
 $\implies \supset, 1, \text{mod}(u + v - a) = 0, \text{Df } \lambda \supset, a \varepsilon \lambda(u + v) ]$   
 $\cdot 11 \quad u, r \varepsilon \text{Cls}'q, a \varepsilon q \supset, \lambda(a + u) = a + \lambda u \quad \cdot 34 \quad \lambda(au) = a \lambda u$   
 $\cdot 12 \quad l' \text{ mod } u, l' \text{ mod } r \varepsilon Q \supset, \lambda(u + r) = \lambda u + \lambda r$   
 $- \cdot 2 \quad \lambda(-u) = -\lambda u$   
 $\times / \cdot 3 \quad \lambda u \times \lambda r \supset \lambda(u \times r) \quad \cdot 4 \quad 0 \varepsilon \lambda u, l' \text{ mod } u \varepsilon Q \supset, \lambda / u = / \lambda u$   
 $\uparrow \cdot 5 \quad m \varepsilon N_1 \supset, \lambda(u^m) = (\lambda u)^m$   
 $\text{Num} \cdot 6 \quad \text{Num } u \varepsilon N_0 \supset, \lambda u = u$   
 $\text{max} \cdot 7 \quad l' u \varepsilon q \supset, l' u = \max \lambda u : l' u \varepsilon q \supset, l' u = \min \lambda u$   
 $\infty \cdot 8 \quad l' u = \infty \implies l' \lambda u = \infty : l' u = -\infty \implies l' \lambda u = -\infty$   
 $\text{Med} \cdot 9 \quad \lambda \text{Med } u = \text{Med } u$

$\mathcal{A} = (\text{limite g n ralis e})$

$\lambda \quad \bullet \quad 3. \quad u \varepsilon \text{Cls}'q \supset$ .

- $\cdot 0 \quad \infty \varepsilon \mathcal{A} u \implies, l' u = \infty, -\infty \varepsilon \mathcal{A} u \implies, l' u = -\infty \quad \text{Df}$   
 $\cdot 1 \quad \mathcal{A} u = \lambda u \cup (u \infty) \cap (\mathcal{A} u) \cup (u - \infty) \cap (\mathcal{A} u) \quad \text{Df}$   
 $\cdot 2 \quad \lambda u = q \cap \mathcal{A} u$   
 $\cdot 3 \quad u, r \varepsilon \text{Cls}'q \supset, \mathcal{A}(u \cup r) = \mathcal{A} u \cup \mathcal{A} r \quad \{ \text{Distrib}(\mathcal{A}, \cup) \}$   
 $\cdot 31 \quad \implies, u \supset r \supset, \mathcal{A} u \supset \mathcal{A} r$   
 $\cdot 4 \quad a \varepsilon q \supset, \mathcal{A}(u + u) = a + \mathcal{A} u$

*Note.* La classe  $\mathcal{A}u$  est form e de la classe  $\lambda u$ , et de  $l' \infty$  et du  $-\infty$ , lorsqu'ils sont la limite supérieure, ou inférieure, des  $u$ . On peut lire  $\mathcal{A}u$  par « limite g n ralis e des  $u$  ».

Continuation  $\S \delta$ ,  $\S \text{Lm}$ ,  $\S q_u \text{ P11}$ ,  $\S \text{vct P10}$ .



§66  $\delta =$  (dérivé)

- \* 1.  $u, v \in \text{Cls}'q \rightarrow \delta u = q \wedge v \exists [x \in \lambda(u - v)]$  Df  
 101  $\delta u = q \wedge v \exists \downarrow \downarrow \text{mod}[(u - v) - v] = 0 \downarrow$  Dfp  
 1  $\delta(u \cup v) = \delta u \cup \delta v$  Distrib.  $(\delta, \cup)$  { 111  $u \supset v \rightarrow \delta u \supset \delta v$   
 2  $\delta \delta u \supset \delta u$  21  $u \supset \delta u \rightarrow \delta u = \delta^2 u$   
 3  $u \in N_1 \rightarrow \delta^m u \supset \delta u$   
 Le signe  $\delta^m u$  a été défini par §+ P109.  
 4  $\text{Num} u \in \text{inf} \downarrow \downarrow \text{mod} u \in Q \rightarrow \exists \delta u$   
 41  $u \in \text{Cls}'q \rightarrow \text{Num} u \in \text{inf} \downarrow \downarrow \text{mod} u \in Q \rightarrow$   
 $\downarrow \downarrow q \wedge v \exists \downarrow \downarrow \text{Num}[u \wedge (v + Q)] \in \text{inf} \downarrow \downarrow = \max \delta u$   
 $\downarrow \downarrow \gg \gg - \gg = \min \delta u$   
 5  $\text{Num} u \in N_0 \rightarrow \neg \delta u$   
 6  $\neg \delta u \rightarrow \delta r = \delta q = q \rightarrow \delta / N_1 = \emptyset \rightarrow \delta (/ N_1 + / N_1) = \emptyset \cup / N_1$   
 $\delta (/ N_1 - / N_1) = / N_1 \cup - / N_1 \cup \emptyset$   
 7  $u \in q \rightarrow \delta(u + v) = u + \delta v$   
 8  $\exists \delta u \rightarrow \delta u \supset u \rightarrow \text{Num} \text{Cls}'q \wedge v \exists (u = \delta v) \in \text{inf}$   
 9  $\lambda u = u \cup \delta u$  Dfp  
 } G. CANTOR a.1871 MA. t.5 p.123 { } Continuation F1895 §5{

G. Cantor a indiqué l'ensemble dérivé de  $u$  par  $u'$ ; la notation  $Du$  de F1895 est ici remplacée par  $\delta u$ .

La bibliographie de ces sujets, due à M. Vivanti, est contenue dans F1895 et continuée dans BM. a.1900 p.160.

Plusieurs noms introduits par les A. s'expriment facilement sans des symboles nouveaux, comme suit:

- $\delta u \supset u \equiv u = \lambda u \equiv$  l'ensemble  $u$  est fermé (abgeschlossen, chiuso)  
 $u \supset \delta u \equiv$  l'ensemble  $u$  est condensé en soi (insichdickt)  
 $u = \delta u \equiv$  est parfait (perfect)  
 $\neg q \wedge \delta u \equiv$  est isolé (isolirt)

- \* 2.  $u \in \text{Cls}'q \rightarrow$   
 1  $\delta u \supset u \rightarrow \text{Num} u \in N_0 \cup \text{Num} N_0 \cup \text{Num} \emptyset$   
 } G. CANTOR MA. a.1884 p.488 {  
 2  $\neg u \rightarrow \delta u = u \rightarrow \text{Num} u = \text{Num} \emptyset$   
 } G. CANTOR MA. a.1884 p.485 {

- 3  $u \cap \delta u = \bigwedge \bigcup \text{Num } u \in N_0 \cup \text{Num } N_0$   
 { G. CANTOR MA. a.1882 p.51 ; AM. a.1883 a.373 }  
 ·4  $\text{Num } \delta u = \text{Num } N_0 \bigcup \text{Num } u = \text{Num } N_0$   
 { G. CANTOR MA. a.1882 p.51 ; AM. a.1883 p.374 }  
 Continuation : §cont P1 §D P1 §q<sub>2</sub> P14

### § 67 Int = (intérieur)

$u, r \in \text{Cls}'q \bigcup \cdot 0 \text{ Int } u = Iu = q \cdot \lambda(q \cdot u)$  Df

*Note.* Avec le symbole I on peut exprimer simplement plusieurs autres classes introduites dans F1889, et ensuite par plusieurs A.

Notamment :

$\text{Int } u$  ou  $Iu$  = points intérieurs du domaine  $u$

$Eu = q \cdot \lambda u$  = " extérieurs

$Lu = \lambda(q \cdot u) \cap \lambda u$  = " frontière

·1  $Iu \supset u$  ·2  $IIu = Iu$  ·3  $I(u \cap r) = Iu \cap Ir$

·34  $u \supset r \bigcup Iu \supset Ir$  ·32  $I(u \cup r) \supset Iu \cup Ir$

·33  $I(Iu \cup Ir) = Iu \cup Ir$

[ §2 P1·1·33  $\bigcup$  ·1·33 ]

·4  $\lambda u = q \cdot I(q \cdot u)$  Dfp ·5  $Iu = u \cdot \delta(q \cdot u)$  Dfp

Continuation : §q<sub>2</sub> P15·1 §r P3·2

Continuation : §lim 1·5, 12·4, 18·6 §D 4·7 §S 1, 4, 11·0.

## §71 Lm

q  $A \ast 1. x \varepsilon \text{qf} N_0 \supset$

·0  $\text{Lm} x = a \exists [m \varepsilon N_0 \supset_m a \varepsilon A x'(m+N_0)]$  Df Lm

*Note.* « Soit  $x$  une suite de quantités. Pour définir  $\text{Lm} x$ , qu'on lise « les valeurs limites de  $x$  » ou « la classe limite de  $x$  », soit  $m$  un entier; considérons l'ensemble  $x'(m+N_0)$  des valeurs de la fonction  $xn$ , où  $n$  prend toutes les valeurs entières à partir de  $m$ , et formons la limite  $A$  de cette classe. Si une quantité  $a$  appartient toujours à cette classe, quel que soit le nombre entier  $m$ , elle sera une valeur limite de la suite  $x$ . »

Cette classe limite d'une fonction se rencontre dans Cauchy a.1821 p.30 : « ..... si l'on suppose que la variable  $x$  converge vers zéro, on aura

$$\lim \left( \left( \sin \frac{1}{x} \right) \right) = M((-1, +1)),$$

attendu que l'expression  $\lim \left( \left( \sin \frac{1}{x} \right) \right)$  admettra une infinité de valeurs comprises entre les valeurs extrêmes  $-1$  et  $+1$ . »

Voir §lim 16.11, RdM. a.1892 p.77, et ma publication: *Sur la définition de la limite d'une fonction*, AJ. a.1894.

·01  $\text{Lm} x \supset A(x'N_0)$  ·02  $m \varepsilon N_0 \supset \text{Lm} x \supset A x'(m+N_0)$

·1  $a \varepsilon \text{q} \supset$

$a \varepsilon \text{Lm} x := m \varepsilon N_0 . h \varepsilon \text{Q} \supset_{m,h} \exists (m+N_0) \wedge n \exists [\text{mod}(x_n - a) < h]$

[ Hp . P·0  $\supset$  :  $a \varepsilon \text{Lm} x := m \varepsilon N_0 \supset_m a \varepsilon \text{q} \wedge A x'(m+N_0)$

§1 P3·2  $\supset$  : » » »  $a \varepsilon \lambda x'(m+N_0)$

§1 P1·01  $\supset$  : »  $:= m \varepsilon N_0 \supset_m h \varepsilon \text{Q} \supset_h \exists x'(m+N_0) \wedge y \exists [\text{md}(y-a) < l]$

Import  $\supset$  : »  $:= m \varepsilon N_0 . h \varepsilon \text{Q} \supset_{m,h} .$  » » » » »

§1 P1·3  $\supset$  : » » » » »  $\exists (m+N_0) \wedge n \exists [\text{md}(x_n - a) < n]$

·2  $+\infty \varepsilon \text{Lm} x := l' x'N_0 = \infty$

·3  $-\infty \varepsilon \text{Lm} x := l_1 x'N_0 = -\infty$

·4  $l' x'N_0, l_1 x'N_0 \varepsilon \text{q} \supset l_1^1 [l' x'(m+N_0)] | m' N_0 \varepsilon \text{q} \wedge \text{Lm} x$

[ Hp .  $m \varepsilon N_0$  . §1 P1·2  $\supset x'(m+N_0) \supset x'N_0$

Hp(1) . §Q P18·5  $\supset l' x'(m+N_0) \varepsilon \text{q}$  (1)

Hp .  $m, n \varepsilon N_0 . m < n \supset l' x'(m+N_0) \equiv l' x'(n+N_0)$  (2)

Hp .  $y = [l' x'(m+N_0)]m . (2) . (3) \supset y \varepsilon (\text{qf} N_0) \text{decr}_0$  (3)

Hp(4) .  $m, n \varepsilon N_0$  . §1 P2·7  $\supset y(m+n) \varepsilon \lambda x'(m+n+N_0)$  (4)

» » . §1 P1·31  $\supset \lambda x'(m+n+N_0) \supset \lambda x'(m+N_0)$  (5)

» » . (5) . (6)  $\supset y(m+n) \varepsilon \lambda x'(m+N_0)$  (6)

» .  $m \varepsilon N_0$  . (7)  $\supset y'(m+N_0) \supset \lambda x'(m+N_0)$  (7)

» . »  $\supset ym \equiv l_1 x'N_0$  (8)

(9)

$$\text{Hp}(4) . a \equiv 1, y^* N_0 . 9 . \S Q \text{ P18.12 } \supset . a \varepsilon q \quad (10)$$

$$\text{Hp}(10) . m \varepsilon N_0 . \S \text{decr P.9 } \supset . a \equiv 1, y^* m + N_0 \quad (11)$$

$$» » . (11) . \S \S \text{ P2.7 } \supset . a \varepsilon \lambda y^* m + N_0 \quad (12)$$

$$» » . (12) . (8) \supset . a \varepsilon \lambda \lambda x^* m + N_0 \quad (13)$$

$$» » . (13) . \S \S \text{ P1.2 } \supset . a \varepsilon \lambda x^* m + N_0 \quad (14)$$

$$» . (14) \text{ Export } \supset . m \varepsilon N_0 \supset_m . a \varepsilon \lambda x^* m + N_0 \quad (15)$$

$$» . (15) . \text{P.9 } \supset . a \varepsilon q \wedge \text{Lm} x \quad (16)$$

$$\text{Hp} . y = 1, x^* m + N_0 \downarrow m . a \equiv 1, y^* N_0 \supset . a \varepsilon q \wedge \text{Lm} x \quad ]$$

$$.41 \text{ Hp P.4 } \supset . 1_i \downarrow [1', x^* m + N_0] \downarrow m^* N_0 \downarrow = \max \text{Lm} x$$

$$.42 \quad » \quad 1_i \downarrow 1_i \quad » \quad \min \quad »$$

$$.5 \quad \exists \text{Lm} x \quad ] \text{ P.23.4 } \supset . \text{P} ]$$

$$.6 \quad \lambda (q \wedge \text{Lm} x) = q \wedge \text{Lm} x$$

$$* \quad 2. \quad x, y \varepsilon qfN_0 . a \varepsilon q . m \varepsilon N_1 \supset :$$

$$.0 \quad \text{Lm} (u \text{f} N_0) = u$$

$$.1 \quad \text{Lm}(a+x) = a + \text{Lm} x$$

$$.2 \quad \neg(-x \varepsilon \text{Lm} x . +x \varepsilon \text{Lm} y) . \neg(+x \varepsilon \text{Lm} x . -x \varepsilon \text{Lm} y) \supset . \\ \text{Lm}(x+y) \supset \text{Lm} x + \text{Lm} y$$

$$.3 \quad \text{Lm} x = \text{Lm}[x^* m + r] \downarrow r$$

$$.4 \quad \text{Lm}(-x) = -\text{Lm} x \quad \cdot 5 \quad a \varepsilon \text{Lm} x . = . 0 \varepsilon \text{Lm}(x-a)$$

$$.6 \quad a = 0 \supset . \text{Lm}(a \times x) = a \times \text{Lm} x$$

$$.7 \quad \neg(0 \varepsilon \text{Lm} x . x \varepsilon \text{Lm} \text{mod} y) . \neg(0 \varepsilon \text{Lm} y . x \varepsilon \text{Lm} \text{mod} x) \supset . \\ \text{Lm} x \times y = \text{Lm} x \times \text{Lm} y$$

$$.8 \quad x \varepsilon \text{Qf} N_0 . 0 . x \neg \varepsilon \text{Lm} x \supset . \text{Lm}/x = / \text{Lm} x$$

$$.9 \quad \text{Lm} x^m = (\text{Lm} x)^m$$

$$.91 \quad \text{Lm} (-1)^n \downarrow n = t1 \downarrow t(-1)$$

$$* \quad 3.$$

$$.1 \quad m \varepsilon N_1 \supset . \text{Lm} \beta(n-m) \downarrow n = [0^{**}(m-1)] \downarrow m$$

$$.2 \quad a \varepsilon R \supset . \text{Lm} \beta(a \downarrow n) \downarrow n = [0^{**}(\text{d}ta-1)] \downarrow \text{d}ta$$

$$.3 \quad a \varepsilon \text{Q} \cdot R \supset . \text{Lm} \beta(a \downarrow n) \downarrow n = \Theta \quad \cdot 31 \quad \text{Lm} \beta \downarrow = \Theta$$

$$.4 \quad \text{Lm} [n - (\text{E} \downarrow n^2)] \downarrow n = N_0 \downarrow t \infty \quad . \quad \text{Lm} [n - (\text{E} \downarrow n^2)] \wedge \downarrow n \downarrow n = 2\Theta$$

$$* \quad 4. \quad u \varepsilon \text{Cls}' q . x \varepsilon \delta u . f \varepsilon qf u \supset . \quad .0 \quad \text{Lm}(f, u, x) =$$

$$a3 \downarrow h \varepsilon Q \supset_m . u \varepsilon A f' [ (u-m, x) \wedge y3 \downarrow \text{mod}(y-x) < h ] \downarrow \quad \text{Df}$$

$$.1 \quad u \varepsilon q \supset . \therefore u \varepsilon \text{Lm}(f, u, x) . = :$$

$$h, k \varepsilon Q \supset_{h,k} \exists u-m(x \wedge y3 \downarrow \text{mod}(y-x) < h . \text{mod}(f, y-u) < k ]$$



## §72 lim

$$+ \equiv - \bmod x \text{ q } \text{Lm} \equiv \text{lim}$$

$$* \quad 1. \quad x \in \text{qfN}_0 \cdot \supset \cdot \quad \text{q} \cdot 0 \quad \text{lim} \cdot x \equiv \text{Lm} \cdot x \quad \text{Df lim}$$

$$\cdot 1 \quad a \in \text{q} \cdot \supset \cdot \therefore$$

$$a \equiv \text{lim} \cdot x \cdot := h \in \text{Q} \cdot \supset h \cdot \exists N_0 \cdot \text{m} \exists [n \in \text{m} + N_0 \cdot \supset_n \cdot \text{mod}(x_n - a) < h]$$

$$+ x \equiv \text{lim} \cdot x \cdot := \text{-----} \cdot x_n > h \cdot ]$$

$$- x \text{ -----} \cdot x_n < -h \cdot ] \quad \text{Dfp}$$

*Note.* Soit  $x$  une suite de nombres. Par  $\text{lim} \cdot x$  la limite des  $x$  nous indiquons le nombre fini ou infini qui constitue la classe  $\text{Lm} \cdot x$ . L'expression  $\text{lim} \cdot x$  aura donc une signification lorsque les conditions de §7 P.0 seront satisfaites, c'est-à-dire lorsque la classe  $\text{Lm} \cdot x$  contiendra un seul nombre, fini ou infini. La P.1 donne la même Df, où on a remplacé le signe  $\text{Lm}$  par sa valeur.

La notation commune est  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ ; ici la lettre  $n$  est apparente.

Pour les fonctions croissantes les idées  $\text{lim}$  et  $\text{L}$  sont réductibles entre elles, par la P.5. L'expression de Wallis, a.1655 t.1 p.383, où il remarque qu'une quantité variable « continue propius accedere » à une fixe « ita ut differentia tandem evadat quavis assignata minor; adeoque in infinitum continuata evanescet » convient à ce cas particulier.

Dans Cauchy les idées  $\text{Lm}$  et  $\text{lim}$  sont encore confondues. L'idée  $\text{Lm}$  a été abandonnée jusqu'à nos jours. La Df de  $\text{lim}$  encore insuffisante dans la 1-ère éd. de Duhamel, *Cours d'Analyse* a.1847 p.6, est complète dans la 2-ième éd. *Éléments de Calcul infinitésimal* a.1860 p.9: « lorsqu'une grandeur prend successivement des valeurs qui se rapprochent de plus en plus de celle d'une grandeur constante, de telle sorte que la différence avec cette dernière puisse devenir et rester moindre que toute grandeur désignée, soit que la variable soit toujours au-dessus, ou toujours au-dessous, ou tantôt au-dessous et tantôt au-dessus de la constante, on dit que la première *approche indéfiniment* de la seconde, et que celle-ci en est la *limite* ».

Les mots suivants :

« Ainsi nous appelons *limite d'une variable une quantité constante dont la variable approche indéfiniment sans jamais l'atteindre* »

et qui en restreignent la valeur, ont disparu dans la 4-ième éd. a.1886 p.12.

$$\cdot 2 \quad \text{lim} \cdot x \in \text{q} \cup \text{t}(+x) \cup \text{t}(-x) \cdot \supset \cdot \text{Lm} \cdot x \equiv \text{t} \text{lim} \cdot x$$

$$\cdot 3 \quad \lim x \varepsilon q . = : h \varepsilon Q . \supset h . \exists N_0 \wedge m \exists [ n \varepsilon N_0 . \supset n . \text{mod}(x_m - x_m + n) < h ]$$

{ BOLZANO a.1817 p.35: « Wenn eine Reihe von Grössen

$$F^1x, F^2x \dots F^nx \dots F^{n+1}x \dots$$

von der Beschaffenheit ist, dass der Unterschied zwischen ihren  $n$ ten Gliede  $F^nx$  und jedem späteren  $F^{n+1}x$ , sey dieses von jenem auch noch so weit entfernt, kleiner als jede gegebene Grösse verbleibt, wenn man  $n$  gross genug angenommen hat: so giebt es jedesmahl eine gewisse *beständige* Grösse und zwar nur *eine*, der sich die Glieder dieser Reihe immer mehr nähern ... » }

$$\cdot 4 \quad \lim x \varepsilon q . = : h \varepsilon Q . \supset h . \exists N_0 \wedge m \exists [ p, q \varepsilon m + N_0 . \supset p, q . \text{mod}(x_p - x_q) < h ]$$

Les P·3·4 sont deux formes du « principe général de convergence », ainsi nommé par Du Bois-Reymond. Il a eu grande importance dans plusieurs traités d'Analyse; mais on peut le remplacer partout par §q 18·1. Voir mes *Lezioni* a.1893.

L'énoncé symbolique présente les lettres  $h, m, n$  dans l'ordre écrit. Si on les permute, on a des propositions fausses. L'énoncé de Cauchy n'est pas clair; on peut lire les lettres dans l'ordre  $n, m, h$ ; et a donné lieu à des discussions entre Catalan, Mansion.... Voir aussi Encyclopédie t.1 p.79.

$$\cdot 5 \quad f \varepsilon (qf N_0) \text{eres}_0 . \supset . \lim f = l'f \cdot N_0 . \lim f \varepsilon q \cup (+ \infty)$$

$$\cdot 6 \quad \text{-----} \text{decr}_0 \text{-----} \text{-----} l'f \cdot N_0 . \text{-----} \cup (- \infty)$$

$$\cdot 7 \quad a \varepsilon q . \supset . \lim n (a \cdot F N_0) = a$$

$$\ast \quad 2. \quad u \varepsilon \text{Cls}' q . x \varepsilon \delta u . f \varepsilon q f u . \supset ::$$

$$\cdot 0 \quad \lim(f, u, x) = l \text{ Lm}(f, u, x) \quad \text{Df}$$

$$\cdot 1 \quad a \varepsilon q . \supset . a = \lim(f, u, x) . = :$$

$$k \varepsilon Q . \supset k . \exists Q \wedge h \exists [ y \varepsilon u - t x . \text{mod}(y - x) < h . \supset y . \text{mod}(fy - a) < k ]$$

$$\cdot 2 \quad \infty = \lim f, u, x) . = : k \varepsilon Q . \supset k .$$

$$\exists Q \wedge h \exists [ y \varepsilon u - t x . \text{mod}(y - x) < h . \supset y . \text{mod} fy > k ]$$

$$\cdot 3 \quad \lim(f, u, x) \varepsilon q . = : k \varepsilon Q . \supset k . \exists Q \wedge h \exists [ y, z \varepsilon u - t x . \text{mod}(y - x) < h . \text{mod}(z - x) < h . \supset y, z . \text{mod}(fy - fz) < k ]$$

$$\cdot 4 \quad \exists t \lim(f, u, x) . r \varepsilon \text{Cls}' u . x \varepsilon \delta r . \supset . \lim(f, r, x) = \lim(f, u, x)$$

La P·0 donne la Df de  $\lim f, u, x$  qu'on peut lire " la limite de la fonction  $f$ , lorsque la variable, en variant dans la classe  $u$ , tend vers  $x$ , qui est une valeur appartenant à la classe dérivée de  $u$  ".

$$\ast \quad 3. \quad u \varepsilon \text{Cls}' q . l' \text{ mod } u = \infty . f \varepsilon q f u . \supset .$$

$$\lim(f, u, \infty) = l \text{ Lm}(f, u, \infty)$$

Df



$$\begin{aligned}
+ & \quad * \quad 4.1 \quad a \in q \Rightarrow \lim (a+n) = a \\
2 & \quad x, y \in q \cap N_0, \lim x, \lim y \in q \Rightarrow \lim (x+y) = \lim x + \lim y \\
& \quad \gg \quad \lim x = \infty, -\infty \Rightarrow \lim y \Rightarrow \lim (x+y) = \infty \\
& \quad \} \text{ Distrib}(\lim, +)
\end{aligned}$$

[illegible]

$$\begin{aligned} \times \quad & \text{6.1} \quad a \in Q \Rightarrow \lim (an)^{\dagger} n = \cdot \\ \text{7.2} \quad & x, y \in \text{qfN}_0 \Rightarrow \lim x, \lim y \in \text{qfN}_0 \Rightarrow \lim (x \times y) = \lim x \times \lim y \\ & \lim x = \cdot \vee 0 \neq \lim y \Rightarrow \lim xy = x \\ & \{ \text{Distrib}(\lim, \times) \} \end{aligned}$$

$$\begin{array}{ccccccc} \text{7.1} & \lim (\varphi_n) \neq 0 & & & & & \\ \text{7.2} & x \in (\varphi_n(0))^\circ, \lim x \in \varphi_n(0) \Rightarrow \lim \varphi_n = \varphi \lim x & & & & & \\ & \gg & =0 & \gg & \varphi & & \\ & \gg & \varphi & \gg & 0 & \{ \text{Comm}(\lim, \varphi) \} \end{array}$$

3.  $a, b, c, d \in \mathbb{Q}, c \neq -dX_0, \lim_{n \rightarrow \infty} (an+b)/cn+d = a/c$   
 JAC. BERNOULLI a.1689 *Opera*, p.382

$$4 \quad x \in \text{qfN}_0, \lim(x_{n+1} - x_n) = 0 \text{ and } (x_n) \text{ is Cauchy} \Rightarrow \lim(x_n/n) = \lim(x_{n+1} - x_n) = 0 \quad \text{Cauchy a.1821 p.63}$$

$$\begin{array}{l}
1 \quad * \quad 8.1 \quad a \varepsilon Q . \bigcup . \lim (a^n) | n = \infty : \lim (n^{-a}) | n = 0 \\
2 \quad a \varepsilon 1 + Q . \bigcup . \lim (a^n) | n = \infty \\
[ \quad n \varepsilon N_1 . \bigcup . a^n > 1 + n(a-1) : \text{Lim}[1+n(a-1)] | n = \infty : \sup P \quad ] \\
2.1 \quad a \varepsilon \theta . \bigcup . \lim (a^n) | n = 0 \\
3 \quad x \varepsilon \text{qf } N_0 . \lim . x \varepsilon q . m \varepsilon N_1 . \bigcup . \lim(x^m) = (\lim x)^m \\
3.1 \quad x \varepsilon \text{Qf } N_0 . \lim . x \varepsilon Q . m \varepsilon q . \bigcup . \lim(x^m) = (\lim x)^m \\
4 \quad \text{Hp}3.1 \quad y \varepsilon \text{qf } N_0 . \lim y \varepsilon q . \bigcup . \lim x \upharpoonright y = (\lim x) \upharpoonright (\lim y) \\
\hspace{15em} \} \text{Distrib}(\lim, \upharpoonright)
\end{array}$$

$$\begin{aligned} & \text{41 } a \varepsilon \mathbb{Q} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a|n|} = 1 \\ & \text{5 } a \varepsilon \theta \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} (a|n|)^{1/n} = 1 \quad a \in \mathbb{Q} \\ & \text{-----} \\ & \text{ } \end{aligned}$$

$$6 \quad x \in \text{Qf}X_0, \lim (x_{i-1}/x_n) \mid n \in \text{Qf}X \Rightarrow \lim (\sqrt[n]{x_n}) \mid n = \lim (x_{i-1}/x_n) \mid n \quad \text{CACHY a.1821 p.63}$$

7.  $a, b \in \mathbb{Q} \Rightarrow \lim [(^n\sqrt{a} + ^n\sqrt{b})/2]^n = \sqrt{ab}$

8.  $a \in 1 + \mathbb{Q} \Rightarrow \bigcup_n \lim (a^n/n) \mid n = x$   
 } JAC. BERNOULLI a.1689 p.383 }

·81 ——— .  $m \in \mathbb{N}$ ,  $\bigcup \lim (a^n/n^m) | n = x$

- 9  $u \in Q, n \in N_1, \bigcup. \lim [{}^n \sqrt{(u+r)} | x^n 0] | r = r Q \wedge x3(x^n - r - a) = 0$   
 } JOH. BERNOULLI t.4 p.13:  
 $\leftarrow$  universaliter  ${}^n \sqrt{(u + {}^n \sqrt{(u + {}^n \sqrt{(u + {}^n \sqrt{(a \& c))})})})}$  pro aequatione  
 habebitur  $x^n - x - a = 0 \rightarrow$  }

- \* 9·1  $u \in \text{qf}N_1, \lim u \in \text{eq} \bigcup. \lim [\Sigma(u, 1 \cdots n) | n] | n = \lim u$  [=P7·4]  
 ·2  $n \in N_1, u \in \text{qf}(1 \cdots n, N_0) \bigcup.$   
 $\text{Lm} \Sigma[u(r, s) | r, 1 \cdots n] | s \supset \Sigma[\text{Lm } u(r, s) | s] | r, 1 \cdots n \}$   
 ·3 Hp·2 :  $r \in 1 \cdots n \bigcup. \lim u(r, s) | s \in \text{eq} \bigcup.$   
 $\lim \Sigma[u(r, s) | r, 1 \cdots n] | s = \Sigma[\lim u(r, s) | s] | r, 1 \cdots n \}$   
 } Comm( $\Sigma, \lim$ ) {

$\Sigma$  \* 10.  $u, r \in \text{qf}N_0 \bigcup.$

$$\cdot 0 \quad \Sigma(u, N_0) = u_0 + u_1 + \dots = \lim [\Sigma(u, 0 \cdots n)] | n \quad \text{Df}$$

P·0 Soit  $u$  une suite de  $q$ ; c'est-à-dire soient  $u_0, u_1, u_2, \dots$  des quantités.  $\Sigma(u, N_0)$ , qu'on écrit aussi  $u_0 + u_1 + \dots$  lorsque la loi de formation est suffisamment claire, et qu'on peut lire « la somme de la série  $u$  », est la limite de  $\Sigma(u, 0 \cdots n)$  pour  $n$  infini.

$\Sigma(u, N_0) \in \text{eq} \bigcup. =$  « la série  $u$  est convergente (advergens de Leibniz) »

$\Sigma \text{ mod } a, N_0 \in Q \bigcup. =$  « la série est absolument convergente ».

Selon plusieurs A. une série est dite « divergente », si elle n'est pas convergente; selon d'autres, si  $\Sigma(u, N_0) = x$ , ou  $\Sigma(u, N_0) = \pm x$ , ou si  $x \in \text{Lm} \Sigma(u, 1 \cdots n) | n$ ; alors une série ni convergente ni divergente est dite « indéterminée ».

- 1  $\Sigma(u, N_0) \in \text{eq} \bigcup. \lim u = 0$  } CAUCHY a.1821 p.116 {  
 [ Hp.  $n \in N_1 \bigcup. u_n = \Sigma(u, 0 \cdots n) - \Sigma(u, 0 \cdots (n-1))$  ] (1)  
 Hp. (1)  $\bigcup. \lim u = \Sigma(u, N_0) - \Sigma(u, N_0) = 0$  ]

- 2  $m \in N_1 \bigcup. \Sigma(u, N_0) = \Sigma[u, 0 \cdots (m-1)] + \Sigma(u_{m+r} | r, N_0)$

- 3  $\Sigma(u, N_0), \Sigma(r, N_0) \in \text{eq} \bigcup. \Sigma(u+r, N_0) = \Sigma(u, N_0) + \Sigma(r, N_0)$   
 } CAUCHY a.1821 p.132 {

$$\begin{aligned} [ \text{P10·0} \bigcup. \Sigma(u+r, N_0) &= \lim \Sigma(u+r, 0 \cdots n) | n \\ \S \Sigma \text{ P1·41} &= \lim [\Sigma(u, 0 \cdots n) + \Sigma(r, 0 \cdots n)] | n \\ \S \Sigma \text{ P1·4} &= \lim [\Sigma(u, 0 \cdots n) | n + \Sigma(r, 0 \cdots n) | n] \\ \text{P4·2} &= \lim \Sigma(u, 0 \cdots n) | n + \lim \Sigma(r, 0 \cdots n) | n \\ \text{P10·0} &= \Sigma(u, N_0) + \Sigma(r, N_0) ] \end{aligned}$$

- 4  $m \in N_1, u \in \text{qf}(1 \cdots m; N_0) \bigcup.$   
 $\Sigma[\Sigma[u(r, s) | r, 1 \cdots m] | s, N_0] = \Sigma[\Sigma[u(r, s) | s, N_0] | r, 1 \cdots m \}$

- 5  $u \in \text{Qf}N_0 \bigcup. \Sigma(u, N_0) \in Q \cup t x$   
 [ Hp  $\bigcup. \Sigma(u, 0 \cdots n) | n \in (\text{Qf}N_0) \text{ cres. P1·5} \bigcup. \text{Ths} ]$



$\times \Sigma \quad *$  13.

- 1  $u \varepsilon \text{Qf} N_0, u \varepsilon \text{Q}, \Sigma(u, N_0) \varepsilon \text{Q} \rightarrow \Sigma(uu, N_0) = u \Sigma(u, N_0)$   
 $[ \text{Hp} \rightarrow \Sigma(uu, N_0) = \lim \Sigma(uu, 0 \cdots n) \mid u = \lim u \Sigma u, 0 \cdots n \mid u =$   
 $a \lim \Sigma u, 0 \cdots n \mid u = a \Sigma(u, N_0) ]$
- 2  $u \varepsilon \text{Qf} N_0, \Sigma(u, N_0) \varepsilon \text{Q}, r \varepsilon \text{Qf} N_0, r \varepsilon N_0 \varepsilon \text{Q} \rightarrow \Sigma(r \times u, N_0) \varepsilon \text{Q}$   
 $[ \text{Hp} \rightarrow \Sigma(r \times u, N_0) \leq r \varepsilon N_0 \Sigma(u, N_0) \rightarrow \text{Ths} ]$
- 3  $k \varepsilon \text{Cls}' \text{Q}, u \varepsilon \text{Q} \rightarrow \Sigma uk = u \Sigma k$
- 4  $u \varepsilon \text{Qf} N_0, \Sigma(u, N_0) \varepsilon \text{Q} \rightarrow 0 \varepsilon \text{Lm}(uu_n \mid n)$
- 41  $u \varepsilon \text{qf} N_0, \text{Lm} \Sigma(u, 0 \cdots n) \mid n \supset 1, u \varepsilon (\text{Qf} N_0)_{\text{decr}}, \text{lima} = 0 \rightarrow$   
 $\Sigma(uu, N_0) \varepsilon \text{q} \quad \quad \quad \} \text{ABEL t.1 p.222 \{}$
- 5  $u, r \varepsilon \text{Qf} N_0, \Sigma(u, N_0), \Sigma(r, N_0) \varepsilon \text{Q} \rightarrow$   
 $\Sigma(u_m r_{n-m} \mid m, 0 \cdots n) \mid n, N_0 = \Sigma(u, N_0) \times \Sigma(r, N_0)$
- 5  $u, r \varepsilon \text{Qf} N_0, u_0 + u_1 + \dots, r_0 + r_1 + \dots \varepsilon \text{Q} \rightarrow$   
 $u_0 r_0 + (u_0 r_1 + u_1 r_0) + (u_0 r_2 + u_1 r_1 + u_2 r_0) + \dots = (u_0 + u_1 + \dots)(r_0 + r_1 + \dots)$   
 $\} \text{CAUCHY a.1821 p.127 \{}$
- $[ p \varepsilon N_1 \rightarrow \Sigma[u, 0 \cdots E p/2] < \Sigma[r, 0 \cdots E p/2] < \Sigma[\Sigma(u_m r_{n-m} \mid m, 0 \cdots n) \mid n,$   
 $0 \cdots p] < \Sigma u, 0 \cdots p] \times \Sigma r, 0 \cdots p] \rightarrow P ]$
- 6  $u \varepsilon (\text{Qf} N_0)_{\text{decr}}, \Sigma(u, N_0) = x, n \varepsilon N_1, h \varepsilon 0 \cdots (n-1) \rightarrow$   
 $\Sigma(a, n \times N_0 + h) = x$

$/ \Sigma \quad *$  14.1  $\Sigma / N_1 = x \quad \} \text{LEIBNIZ a.1673 MathS. t.1 p.49 \{}$

- 2  $a, b \varepsilon \text{Q} \rightarrow \Sigma / (a + N_0 b) = x$
- 3  $1 = / (1.2) + / (2.3) + / (3.4) + \dots \quad [ \text{P12.1}, u_n = / (n+1) \rightarrow P ]$   
 $\} \text{BROUNCKER a.1668 LondonT. t.3 p.645 \{}$
- 4  $a \varepsilon \text{q}(-N_1) \rightarrow / (a+1) = / [(a+1)(a+2)] + / [(a+2)(a+3)] + \dots$   
 $\} \text{STIRLING a.1730 p.23 \{ \quad \text{Continuation: P21.6}$
- 5  $m \varepsilon N_1 \rightarrow (1 + / 2 + \dots + / m) / m = / [1(m+1)] + / [2(m+2)] + \dots$   
 $\} \text{MACLAURIN a.1742 p.295 \{}$
- 6  $a \varepsilon \text{q}(-N_0), m \varepsilon N_1 \rightarrow [ / a + / (a+1) + \dots + / (a+m-1) ] / m =$   
 $/ [a(a+m)] + / [(a+1)(a+m+1)] + \dots \quad \} \text{MACLAURIN a.1742 p.298 \{}$

$*$  15.  $u, r \varepsilon \text{Qf} N_0 \rightarrow$

- 1  $r(u/r \varepsilon N_0) \varepsilon \text{Q}, \Sigma(r, N_0) \varepsilon \text{Q} \rightarrow \Sigma(u, N_0) \varepsilon \text{Q} \quad [ = \text{P13.2} ]$
- 2  $h \varepsilon \theta, m \varepsilon N_1, n \varepsilon m + N_0 \rightarrow_n, u_{n+1} / u_n < h \rightarrow \Sigma(u, N_0) \varepsilon \text{Q}$   
 $[ \text{Hp}, r \varepsilon N_1 \rightarrow u_{n+r} < u_n h^r \quad (1)$   
 $\text{Hp}, (1) \rightarrow \Sigma(u_{n+r} \mid r, N_1) < u_n / (1-h) \rightarrow P ]$



- \*9  $\sum (1+N_1)^n (-1-N_1) = 1$  } LEIBNIZ a.1673 MathS. t.1 p.49 {  
 \*91  $\rho \in 1+N_1, n \in R$  }  
 $\sum [\rho^n (-n^2) | n, N_0], \sum [(-1)^n \rho^n (-n^2) | n, N_0], \sum [\rho^n \rho^n (-n^2) | n, N_0] \in Q\text{-}R$   
 } EISENSTEIN JfM. a.1843 p.193 {  
 .  
 Num  $\sum$  \* 17.  
 \*1  $x \in \theta$  } $\sum [x^n (1-x^n) | n, N_1] = \sum \{ \text{Num}(N_1 \cap n N_1) \times x^n | n, N_1 \}$   
 } LAMBERT *Architectonik* a.1771 t.2 p.597 {  
 \*2  $x \in \theta$  } $\sum [x^n (1-x^n) | n, N_1] = \sum \{ \text{Num}[N_1 \cap n (N_1+1)] x^n | n, N_1 \}$   
 } EULER PetrNC. t.5 a.1760 p.70 {  
 $\sum \bmod$  \* 18.  
 \*1  $n \in \text{qf} N_0, \sum \bmod n, N_0 \in Q$  } $\sum (n, N_0) \in q$  } CAUCHY a.1821 p.129 {  
 [ Hp } $\sum, n = \{ \bmod n + n \rightarrow \bmod n - n \} / 2$  } $\sum, \bmod n + n, \bmod n - n$   
 $\in Q_0 \text{f} N_0, \sum \bmod n + n + (\bmod n - n, N_0) / 2 = \sum \bmod n, N_0 \in Q$  } $\sum$   
 $\sum \bmod n + n, N_0, \sum \bmod n - n, N_0 \in Q_0$  } $\sum$ . Ths ]  
 \*2  $n \in \text{qf} N_0, \sum \bmod n, N_0 \in Q, r \in (N_0 \text{f} N_0 \text{rep})$  } $\sum nr, N_0 = \sum (n, N_0)$   
 } DIRICHLET JfM. a.1829 {  
 \*3  $n \in \text{qf} N_0, \sum (n, N_0) \in q, \sum (\bmod n, N_0) = x, h \in q \cup (x \cup (-x))$  } $\sum$ .  
 $\mathfrak{A}(N_0 \text{f} N_0 \text{rep}) \cap \mathfrak{A} \sum (nr, N_0) = h$  } RIEMANN a.1854 p.221 {  
 \*4  $n \in Q \text{f} N_0, \sum (n, N_0) = x, \lim n = 0, n \in q$  } $\sum$ .  
 $\mathfrak{A}(n \cup (-n) \text{f} N_0) \cap \mathfrak{A} \sum n = \sum (n, N_0)$   
 } MANSION a.1887 *Rés. du cours d'Analyse inf.*, Paris p.281 {  
 \*5  $h \in \text{Cls}, \text{Num} k = \text{Num} N_0, f \in \text{qf} k, \sum (\bmod f, k) \in Q$  } $\sum (f, k) \in q$   
 Ex. : P19-1.  
 \*6  $n \in (\text{qf} N_0) \text{decr}, \lim n = 0, \sum \bmod n = x, \sum n \in q$  } $\sum$ .  
 $\lim [\sum (\text{sgn} n, 0 \cdots n) | n = 0]$  } CESÀRO *Anal. Alg.* p.164 {  
 \* 19-1  $n \in \text{qf}(N_0; N_0), \sum [\bmod n_{r,s} | (r;s), (N_0; N_0)] \in Q$  } $\sum$ .  
 $\sum \{ \sum (n_{r,s} | r, N_0) | s, N_0 \} = \sum \{ \sum (n_{r,s} | s, N_0) | r, N_0 \}$   
 \*2 Hp-1  $r \in \mathfrak{A}(N_0; N_0 \text{f} N_0 \text{rep})$  } $\sum (nr, N_0) = \sum \{ \sum (n_{r,s} | r, N_0) | s, N_0 \}$   
 } \*2 CAUCHY a.1821 p.445 {  
 $n, r \in \text{qf} N_0$  } $\sum$ :  
 \*3  $\sum (\bmod n, N_0), \sum (\bmod r, N_0) \in Q$  } $\sum$ .  
 $\sum (n, N_0) \times \sum (r, N_0) = \sum [\sum (n_m r_{n-m} | m, 0 \cdots n) | n, N_0]$   
 } CAUCHY a.1821 p.132 {  
 \*4  $\sum (n, N_0), \sum (r, N_0), \sum [\sum (n_m r_{n-m} | m, 0 \cdots n) | n, N_0] \in q$  } $\sum$ . Ths P-3  
 } ABEL a.1826-1 p.226 {  
 \*5  $\sum (\bmod n, N_0) \in Q, \sum (r, N_0) \in q$  } $\sum$ . Ths P-3  
 } MERTENS a.1875 JfM. t.79 p.182 {

- 66  $u \in \text{qf}(N_0; N_\infty) : \sum [l' \bmod u(m, n) | m, N_0] \in Q :$   
 $u \in N_0 : \bigcup_n \lim u(m, n) | m \in q : \bigcup_n \lim \sum [u(m, n) | n, N_0] | m$   
 $= \sum \{ \lim u(m, n) | m | n, N_0 \} \text{ Comm}(\sum, \lim) \}$
- 67  $k \in \text{Cls}(\text{qf}(u, v, N_0) : u \in \text{qf}(k; N_0) : \sum [l' \bmod u(v, n) | v, k] | n, N_0) \in Q :$   
 $u \in N_0 : \bigcup_n \lim [u(v, n) | v, k, n] \in q :$   
 $\lim \sum [u(v, n) | n, N_0] | v, k, n = \sum \lim [u(v, n) | v, k, n] | n, N_0$   
 Ex. : §cont 3-3.

Soit  $u$  une fonction de deux variables entières  $m, n$ . La série  $\sum [u(m, n) | n, N_0]$  est convergente, pour toute valeur de  $m$ , lorsque (P13) :

$$m \in N_0 : \bigcup_i h \in Q : \bigcup_i \exists N_0 \wedge p \leq q \leq p + N_0 : \bigcup_i \text{mod} \sum [u(m, v) | v, p \cdots q] < h_i$$

Quelques A. (Cauchy a.1821 p.131) ont confondu cette condition avec la

$$h \in Q : \bigcup_i \exists N_0 \wedge p \leq m \in N_0 : q \leq p + N_0 : \bigcup_{m, q} \text{mod} \sum [u(m, v) | v, p \cdots q] < h$$

Abel (t.1 p.224) en a noté la valeur différente. On dit que la série  $u$  est de convergence *gleichmässig* (Weierstrass a.1841 t.1 p.67) *uniforme*, in *equal grado* , si elle satisfait à la dernière condition. Sont des conditions quelque peu différentes les convergences *uniformes* : in *generale* (Dini a.1878 p.102) *semplice* (id. p.103) , *a tratti* (Arzelà a.1900 BolognaM. p.744).

Puisque nous n'avons pas introduit un symbole exprès pour indiquer *série convergente* , il ne convient pas d'introduire des symboles pour indiquer les différentes espèces de convergence.

Nous donnons à ces théorèmes la forme sous laquelle ils se présentent dans les applications. Voir §§ 11-12.

Dans la P61, au lieu d'une variable entière  $m$ , on considère une  $x$ , dont la variabilité est  $k$ .

## II \* 20.

- 70  $u \in \text{qf} N_0 : \bigcup_n H(u, N_0) = u_0 u_1 \dots = \lim H(u, 0 \cdots n) | u$  Df
- 71  $m \in n : u \in \text{qf}(m + N_0) : \bigcup_n H(u, m + N_0) = u_0 u_1 \dots = \lim H(u, m \cdots m + n) | u$  Df
- 72  $u \in \text{Qf} N_0 : H(u, N_0) \in Q : \bigcup_n \lim u = 1$
- 73  $a, b \in Q : a < b : \bigcup_n H(u + v | b + v) | v, N_0 = 0$
- 74  $a > b : \bigcup_n H(u + v | a + v) | v, N_0 = x$
- 75  $p \in 1 + N_1 : \bigcup_n H(1 - p^{-n}) | p, N_1 \in Q \cdot R \}$  EISENSTEIN a.1844 p.39 {
- 76  $x \in q : \text{mod } r < 1 : \bigcup_n \sqrt[n]{1+x} = (1+x)(1+x^2)(1+x^4)(1+x^8) \dots$   
 $= H[1+x \uparrow (2^n)] | p, N_0 \}$  EULER a.1748 p.273 {

## \* 21.

- 77  $u \in \text{Qf} N_0 : \bigcup_n H(1+u, N_0) \in Q \implies \sum (u, N_0) \in Q$
- 78  $u \in \text{Of} N_0 : \bigcup_n H(1-u, N_0) \in Q \implies \sum (u, N_0) \in Q$
- 79  $\text{-----} H(1-u, N_0) = 0 \implies \sum (u, N_0) = x$

4.  $a \mathcal{E} (-1+Q) \mathcal{E} N_0, \Sigma(a, N_0), \Sigma(a^2, N_0) \mathcal{E} Q \Rightarrow H(1+a, N_0) \mathcal{E} Q$   
 5.  $\frac{a \mathcal{E} (-1+Q) \mathcal{E} N_0, \Sigma(a, N_0) \mathcal{E} Q, \Sigma(a^2, N_0) = x}{1-3 \text{ CAUCHY a.1821 p.460}} \Rightarrow H(1+a, N_0) = 0$   
 6.  $a \mathcal{E} Q = N_0, m \mathcal{E} N_1 \Rightarrow$   
 $m \Sigma / H(a+r+0 \dots m) | r, N_0 = / H[a+0 \dots (m-1)]$   
 } Joh. BERNOULLI a.1692 t.1 p.521 {

$\Sigma H ! \quad \text{§ 22.}$

1.  $a \mathcal{E} (N_1 \mathcal{E} N_2) \text{eres} \Rightarrow \Sigma[ / H(a, 1 \dots n)] | n, N_1 \mathcal{E} Q = R$   
 $\frac{a \mathcal{E} (N_1 \mathcal{E} N_2) \text{eres} \Rightarrow \Sigma[ / H(a, 1 \dots n)] | n, N_1 \mathcal{E} Q = R}{\frac{a \mathcal{E} (N_1 \mathcal{E} N_2) \text{eres} \Rightarrow \Sigma[ / H(a, 1 \dots n)] | n, N_1 \mathcal{E} Q = R}{\frac{a \mathcal{E} (N_1 \mathcal{E} N_2) \text{eres} \Rightarrow \Sigma[ / H(a, 1 \dots n)] | n, N_1 \mathcal{E} Q = R}{\frac{a \mathcal{E} (N_1 \mathcal{E} N_2) \text{eres} \Rightarrow \Sigma[ / H(a, 1 \dots n)] | n, N_1 \mathcal{E} Q = R}}}$   
 } STERN a.1848 JFM. p.95 {  
 2.  $a \mathcal{E} N_1 \Rightarrow \Sigma a | - (N_1) \mathcal{E} Q = R$   
 3.  $a \mathcal{E} Q \Rightarrow \lim(a^n / n!) | a=0$   
 4.  $\lim(a^n / n!) | a = x$  } CAUCHY a.1821 p.64 {  
 5.  $1 = 2!/2! + 2!/3! + 3!/4! + \dots = \Sigma[ a / (n+1)! | n, N_1]$   
 } Joh. BERNOULLI a.1692 t.1 p.525 {  
 6.  $a \mathcal{E} 1+Q \Rightarrow (a-1) = \Sigma | n! H(a+1 \dots n) | n, N_1$  {  
 } STIRLING a.1730 p. 11 {

C. 23.1  $m \mathcal{E} q, x \mathcal{E} q, \text{mod } x < 1 \Rightarrow$

$$\begin{aligned}
 (1+x)^m &= \Sigma [C(m, n) x^n | n, N_0] = \\
 1 + mx + m(m-1)/2! x^2 + \dots + m(m-1) \dots (m-n+1)/n! x^n + \dots
 \end{aligned}$$

} NEWTON 13 Junii a.1676 :

Sed Extractiones Radicum multum abbreviantur per hoc *Theorema*.

$$P \div P Q \Big| \frac{m}{n} = P \frac{m}{n} + \frac{m}{n} A Q + \frac{m-n}{2n} B Q + \frac{m-2n}{3n} C Q + \frac{m-3n}{4n} D Q + \&c.$$

ubi  $P \div P Q$  significat Quantitatem cujus Radix, vel etiam Dimensio quævis, vel Radix Dimensionis, investiganda est.  $P$  primum terminum quantitatis ejus;  $Q$ , reliquos terminos divisos per primum. Et  $\frac{m}{n}$  numeralem Indicem dimensionis ipsius  $P \div P Q$ : Sive dimensio illa integra sit; sive (ut ita loquar) fracta; sive affirmativa, sive negativa.

Nam, sicut analysis, pro  $aa$ ,  $aaa$ , &c. scribere solent  $a^2$ ,  $a^3$ , &c. sic ego,

pro  $\frac{1}{a}$ ,  $\frac{1}{a^2}$ ,  $\frac{1}{a^3}$  &c. scribo  $a^{-\frac{1}{2}}$ ,  $a^{-\frac{3}{2}}$ ,  $a^{-\frac{5}{2}}$ , &c.

Et sic pro  $\frac{aa}{\sqrt{C : a^3 + b b x}}$ , scribo  $aa : \sqrt{a^3 + b b x}^{-\frac{1}{3}}$

... Denique, pro terminis inter operandum inventis in quoto, usurpo  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$ , &c. Nempe  $A$  pro primo termino  $P \frac{m}{n}$ ;  $B$  pro secundo  $\frac{m}{n} A Q$ ; & sic deinceps. }

Dem : voir §cont 3.4



- 2  $m \in 1+Q$  .  $\bigcup$ .  $2^m = \sum [C(m, n) | n, N_0]$  } ABEL a.1826 t.1 p.245 {  
 ·3  $m \in Q$  .  $\bigcup$ .  $0 = \sum (-1)^n C(m, n) | n, N_0]$  } »  
 ·4  $\{p+1\} \bigcup$ .  $(1-x)^{-m} = \sum [C(m+n, n) x^n | n, N_0]$   
 ·5  $m \in q$  .  $x \in Q-1/2$  .  $\bigcup$ .  $(1+x)^m = \sum [C(m+n, n) [x(1+x)]^n | n, N_0]$

sgn \* 24.

- 1  $k \in 1+Q$  .  $x \in q$  .  $\bigcup$ .  $\text{sgn } x = \lim (k^{x^+} - k^{x^-}) / (k^{x^+} + k^{x^-}) | n$   
 ·2  $x \in r$  .  $\bigcup$ .  $\lim [j(n!x) + j(-n!x)] / n = \lim (\text{sgn } j(n!x) / n) = 0$   
 ·21  $x \in q-r$  .  $\bigcup$ .  $\lim [j(n!x) - j(-n!x)] / n = \lim (\text{sgn } j(n!x) / n) = 1$

max min \* 25.

- 1  $n \in \text{Cls } Q$  .  $\text{Num } n \in N_1$  .  $\bigcup$ .  $\lim [(\sum n^{n-1}) / (\sum n^n)] | n = \max n$   
 } D. BERNOULLI *PebrC.* t.3 {  
 ·2  $\{p+1\} \bigcup$ .  $\lim [(\sum n^n) / n] | n = \max n$  .  $\lim (\sum n^{n-1}) / n = \min n$   
 } ENCKE a.1841 *JfM.* t.22 {

Chf \* 26.  $x \in q$  .  $\bigcup$ .

- 1  $x = Ex + \sum [X^{-n} \text{Chf } X^n x] | n, N_1]$

La P+1 donne l'expression d'un nombre sous forme de fraction décimale.

Np \* 31.

- 0  $\lim [\text{Num}(Np \wedge 1 \cdots n) | n] | n = 0$  } LEGENDRE a.1797 p.464 {  
 ·1  $\lim [\max [Np \wedge (1+4(1 \cdots n^2)/N_1)] / n] | n = \infty$   
 } TCHEBYCHEF: Voir MARKOFF a.1895 *ParisCR.* t.120 p.1032 {  
 ·2  $\lim [\text{Num}[Np \wedge (4N_0+3 \wedge 1 \cdots n)] - \text{Num}[Np \wedge (4N_0+1) \wedge 1 \cdots n]] | n = \infty$   
 ·3  $\lim \left\{ \frac{\text{Num}[Np \wedge (4N_0+3 \wedge 1 \cdots n)] - \text{Num}[Np \wedge (4N_0+1) \wedge 1 \cdots n]}{\text{Num}[Np \wedge 1 \cdots n]} \right\} | n = 1$   
 ·4  $\lim \left\{ \frac{\text{Num}[Np \wedge (4N_0+3 \wedge 1 \cdots n)] - \text{Num}[Np \wedge (4N_0+1) \wedge 1 \cdots n]}{\text{Num}[Np \wedge 1 \cdots n]} \right\} | n = 1/2$   
 } 2-3 TCHEBYCHEF a.1853 t.1 p.697; ·4 CESÀRO a.1896, *NapoliR.* {  
 ·5  $m \in 1+Q$  .  $\bigcup$ .  $\sum N_1^{-m} = H / (1-n^{-m}) | n, Np]$   
 } EULER a.1744 *PebrC.* t.9 p.172 ; a.1748 p.225 {  
 ·6  $a, b \in N_1$  .  $D(a, b) = 1$  .  $\bigcup$ .  $\sum 1 / [Np \wedge (aN_0+b)] = \infty$   
 } DIRICHLET a.1837 t.1 p.313 {

Continuation : §cont §D §e §C §q<sub>n</sub> P24 §vet P20-21.

§73 cont = (fonction continue)

$$\begin{aligned} \delta \lim * 1. \quad & u \in \text{Cls}'q, u \supset \delta u, \supset: \\ \cdot 0 \quad & f \varepsilon (\text{qf}u)\text{cont} \quad .:: \quad f \varepsilon \text{qf}u : x \varepsilon u, \supset_x, \lim(f, u, x) = fx \quad \text{Df} \\ \cdot 01 \quad & \supset \quad .:: \quad \supset : k \varepsilon Q, x \varepsilon u, \supset_{k,x}. \\ & \exists Q \wedge h \varepsilon [y \varepsilon u, \text{mod}(y-x) < h, \supset_y, \text{mod}(fy-fx) < k] \end{aligned}$$

*Note.* « cont » signifie « fonction continue ». La définition P·0 se rencontre dans Abel t.1 p.223. La P·01 est une transformation de la ·0, où l'on a remplacé le signe « lim » par sa valeur.

$$\begin{aligned} \cdot 1 \quad & \text{I} \text{mod}u \varepsilon Q, u = \delta u, f \varepsilon (\text{qf}u)\text{cont}, k \varepsilon Q, \supset. \\ & \exists Q \wedge h \varepsilon [x, y \varepsilon u, \text{mod}(y-x) < h, \supset_{x,y}, \text{mod}(fy-fx) < k] \end{aligned}$$

Le second membre de la P·1 contient les mêmes éléments que la P·01, différemment groupés. Heine, JfM. a.1870 t.71 p.361 a reconnu la valeur logique différente des P·01 et ·1. La P·1 a été démontrée par Heine, JfM. a.1871 t.74 p.188, Lüroth, MA. t.6 a.1873 p.319.

$$\begin{aligned} * 2. \quad & a, b \varepsilon q, a = b, f \varepsilon (\text{qf} a^- b)\text{cont}, \supset: \\ \cdot 1 \quad & fu < 0, fb > 0, \supset, 0 \varepsilon f^i(a-b) \quad \} \text{CAUCHY a.1821 note 3} \{ \\ & [y = \text{I}^i x \varepsilon [fx < 0], \supset, y \varepsilon a^- b, fy = 0] \} \\ \cdot 2 \quad & fu - fb \supset f^i(a-b) \\ \cdot 3 \quad & \exists t \max f^i(a^- b) \quad, \quad \exists t \min f^i(a^- b) \\ & \} \text{WEIERSTRASS: Cfr. G. Cantor JfM. t.72 p.141, t.73 p.296} \{ \\ & [y = \text{I}^i x \varepsilon [x \varepsilon a^- b, \text{I}^i f^i a^- x < \text{I}^i f^i a^- b], \supset, y \varepsilon a^- b, fy = \max f^i(a^- b)] \} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} * 3 \cdot 1 \quad & f \varepsilon (\text{qf}q)\text{cont} : y, z \varepsilon q, \supset_{y,z}, f(y+z) = fy + fz : x \varepsilon q : \supset. \\ & f^i x = (f^i 1) \times x \\ & [ \quad \text{Hp} \supset, f(0+0) = f0 + f0 \supset, f0 = 0 \quad (1) \\ & \text{Hp} : x \varepsilon q \supset, f[x+(-x)] = f^i x + f^i (-x), (1) \supset, f^i (-x) = -f^i x \quad (2) \\ & \text{Hp} : n \varepsilon N_1, x \varepsilon \text{qFI}^{\dots n} \supset, f^i(\Sigma x) = \Sigma(f^i x) \quad (3) \\ & \text{Hp} : n \varepsilon N_1, x \varepsilon q, (3) \supset, f^i(nx) = n f^i x \quad (4) \\ & \text{Hp} : x \varepsilon q, m \varepsilon n, (1), (2), (4) \supset, f^i(mx) = m f^i x \quad (5) \\ & \text{Hp} : x \varepsilon q, n \varepsilon N_1, (1) \supset, f^i[n \cdot x/n] = n f^i(x/n) \supset, f^i(x/n) = f^i x/n \quad (6) \\ & \text{Hp} : x \varepsilon q, m \varepsilon n, n \varepsilon N_1, (5), (6) \supset, f^i[m/n \cdot x] = f^i[m \cdot x/n] = (m/n) f^i x \quad (7) \\ & \text{Hp} : x \varepsilon q, y \varepsilon r, (7) \supset, f^i(y \cdot x) = y f^i x \quad (8) \\ & \text{Hp} : x \varepsilon r, (1, x) \cdot (y, y \text{P} 8) \supset, f^i x = x f^i 1 \quad (9) \\ & \text{Hp} : x \varepsilon \text{q-r} \supset, f^i x = \lim(f^i y | y, r, x) = \lim[y(f^i 1) | y, r, x] = x f^i 1 \quad (10) \\ & (9), (10) \supset, \text{P} \quad ] \end{aligned}$$

2.  $f\varepsilon(\text{qf})\text{cont} : y, z\varepsilon\mathbb{Q} \Rightarrow y, z, f(y+z) = fy \times fz : x\varepsilon\mathbb{Q} \Rightarrow$   
 $f'x = (f')\upharpoonright_{x'}$  } 1.2 CARCHY a.1821 p.103 {
3. Hp P1.  $f\varepsilon\text{qf}(r;N_0) : n\varepsilon N_0 \Rightarrow \bigcup_n. f(r,n) \mid_{x'} \varepsilon(\text{qf})\text{cont} : \Sigma\{f \mid \text{mod } f(r,n) \mid_{x'} \mid n, N_0\} \varepsilon\mathbb{Q} \Rightarrow \Sigma[f(r,n) \mid n, N_0] \mid_{x'} \varepsilon(\text{qf})\text{cont}$   
 [ §lim 19.61.  $\Rightarrow$ . P ]
4. §lim P23.1 Dm  
 [  $x\varepsilon\mathbb{Q} \mid \text{mod } x < 1 \mid m\varepsilon\mathbb{Q} \Rightarrow$   
 $\lim \text{mod } [C[m,n] \mid 1 \mid x^m \mid 1] [C[m,n] \mid x^n] : n = \text{mod } x$  1  
 Hp 1.  $\S\text{lim } 15.2 \Rightarrow \Sigma[\text{mod } C[m,n] \mid x^n \mid n, N_0] \varepsilon\mathbb{Q}$  2  
 Hp 2.  $\S\text{lim } 18.1 \Rightarrow \Sigma[C[m,n] \mid x^n \mid n, N_0] \varepsilon\mathbb{Q}$  (3)  
 $x\varepsilon\mathbb{Q} \mid \text{mod } x < 1 \mid f' = \Sigma[C[m,n] \mid x^n \mid n, N_0] \mid_{x'} \mid_{(3)} \Rightarrow f'\varepsilon\text{qf}\text{cont}$  4  
 Hp 4.  $\Rightarrow f'1 = 1+x$  5  
 Hp 4.  $\mid m, n\varepsilon\mathbb{Q} \mid \S\text{lim } 19.3 \Rightarrow f'm \times f'n =$   
 $\Sigma[\Sigma[C[m,r] \mid C[n,s-r] \mid r, 0 \dots s] \mid s, N_0]$  (6)  
 Hp 6.  $\S\text{C } 6.31 \Rightarrow f'm - f'n = f' \mid m \mid n$  7  
 Hp 4.  $\mid (5) \mid (6) \mid \S\text{cont } 3.2 \Rightarrow m\varepsilon\mathbb{Q} \Rightarrow f'm = 1+x^m$  (8)  
 8.  $\supset \text{P} ]$

Cette démonstration pour  $m$  rationnel est due à Euler, a.1774 PetrNC. t.19 p.109, Abel a.1826 t.1 p.223, a étudié la série binomiale pour toutes les valeurs de  $x$  et de  $m$ .

§74.  $D =$  (dérivée)

$+ - \times / q \delta \lim * 1.$

·1  $k \in \text{Cls}'q, k \supset \delta k, f \in qfk, x \in k, \supset.$

$D(f, k, x) = \lim[(f, y - f, x)/(y - x)] [y, k, x] \quad \text{Df D}$

·11  $\text{Hp } 1, \supset. D(f, k, x) = \lim_h [f, x + h - f, x]/h [h, k - x, 0] \quad \text{Dfp}$

·2  $k \in \text{Cls}'q, k \supset \delta k, f \in qfk, x \in k, \supset.$

$Df, x = \lim[(f, y - f, x)/(y - x)] [y, \text{Variab } f, x] \quad \text{Df}$

·3  $\text{Hp } 2, \supset. Df = (Df, x [x, \text{Variab } f]) \quad \text{Df}$

*Note.*

Pour avoir une dérivée il faut donner une fonction  $f$ , la classe  $k$  des valeurs de la variable, dans laquelle la fonction est définie, et une valeur particulière  $x$ , appartenant à la classe  $k$ ; il appartient aussi à sa dérivée  $\delta k$ , si  $k \supset \delta k$ .

Nous l'indiquons par  $D(f, k, x)$ , qu'on pourra lire « la dérivée de la fonction  $f$ , considérée dans la classe  $k$ , pour la valeur  $x$  de la variable ». Ce symbole représente, par définition P·1, la limite du rapport  $(f, y - f, x)/(y - x)$ , la limite étant obtenue en faisant varier  $y$ , dans la classe  $k$ , vers  $x$ .

La classe  $k$  coïncide dans la pratique avec la classe  $q$  (ex. P3·1, ou Q (ex. P3·1), ou est un intervalle, ou l'ensemble  $q \neq 0$  (ex. P3·2), ou a des formes plus compliquées.

Si l'on fait varier la classe  $k$ , la dérivée ne change pas dans §4·1 §q 15·1. Elle peut changer dans d'autres cas.

On a p.ex :  $D(\text{mod}, Q_0, 0) = 1, D(\text{mod}, -Q_0, 0) = -1$

Quelques A. appellent dérivée à droite l'expression  $D(f, x + Q_0, x)$ ;  $D(f, x - Q_0, x)$  est la dérivée à gauche.

Si au lieu de donner la fonction  $f$ , l'on donne l'expression contenant une variable  $x$ , il suffit d'écrire après cette expression le signe  $[x]$ , pour avoir la fonction  $f$ . Dans  $f, x [x]$  la lettre  $x$  est apparente; en conséquence il ne faut pas la confondre avec la  $x$  qu'on peut rencontrer dans une autre place de la même formule.

La notation que nous adoptons satisfait aux lois sur les définitions; rien ne doit être sous-entendu, ou ajouté par le langage ordinaire.

Mais, pour nous rapprocher des notations communes, on peut considérer l'ensemble de la fonction  $f$  et de la classe  $k$  dans laquelle cette fonction est censée définie, comme un objet seul. Si nous l'indiquons simplement par  $f$ , on aura  $f \in qfk$ . La P·2 définit alors  $Df, x$ , qu'on doit considérer comme décomposée en  $(Df, x)$  dérivée de  $f$ , pour la valeur  $x$ , et non en  $D f, x$ , car on ne dérive pas le nombre  $f, x$ .

La ·3 donne la définition du symbole  $Df$ .

Leibniz indique la dérivée de  $y$  par rapport à  $x$ , par le signe  $\frac{dy}{dx}$ , où  
 «recta aliqua pro arbitrio assumpta vocetur  $dx$ » (MathS. t.5 p.220) et «ipsas  
 $dx, dy$ , ut ipsarum  $x, y$  differentiis sive incrementis, vel decrementis mo-  
 mentaneis proportionales haberi posse» (p.169). Dans quelques cas il pose  
 $dx=1$ ; alors le signe  $d$  indique la dérivée; comme dans les formules :

$$d\bar{x}=1, d\bar{x}^2=2x, d\bar{x}^3=3x^2 \text{ etc. } d\frac{1}{x}= -\frac{1}{x^2} \text{ etc.}$$

*Briefwechsel* t.1 p.226)

Newton indique la dérivée par un point au dessus de la fonction  
 (Voir P8); Lagrange par un accent (Voir P9); Arbogast par  $Df/x$ .

Cauchy (*Cours* s.1 t.4 p.255) indique les dérivées par  $D_x, D_y, \dots$  où  
 l'indice désigne la variable par rapport à laquelle on dérive.

Jacobi a distingué la dérivée d'une fonction de plusieurs variables, par  
 rapport à une variable, par des  $\partial$ ; les dérivées sont alors dites " par-  
 tielles ". Ces notations sont insuffisantes, car si l'on a une fonction de 3  
 variables  $f(x, y, z)$ , et si  $u = f(x, y, z)$ ,  $u_x = f_x(x, y, z)$ , il faudrait plusieurs espèces  
 de  $d$  pour indiquer les 4 dérivées :

$$Df(x, y, z) [x], Df(x, u, z) [x], Df(x, y, u) [x], Df(x, u, u) [x].$$

✱ 2.  $k \in (\mathbb{S}_q, k) \supset \delta k, f, u, v, Du, Dv \in \mathbb{QF}k, u \in \mathbb{Q}_1, \supset.$

$$\cdot 1 \quad D(u+v) = Du + Dv$$

$$\begin{aligned} [ \text{Hp} , x \in k , \supset , \quad D(u+v) &= \lim_{y \rightarrow x} (u+v)(y) - (u+v)(x) / (y-x) [y, k, x] \\ &= \lim_{y \rightarrow x} (uy + vx - ux - vx) / (y-x) \\ &= \lim_{y \rightarrow x} (uy - ux) / (y-x) + \lim_{y \rightarrow x} (vx - vx) / (y-x) \\ &= \lim_{y \rightarrow x} (uy - ux) / (y-x) [y, k, x] + \lim_{y \rightarrow x} (vx - vx) / (y-x) [y, k, x] \\ &= Du + Dv ] \end{aligned}$$

$$\cdot 2 \quad Du = uDu$$

$$\cdot 3 \quad D(u \times v) = u \times Dv + v \times Du$$

$$\begin{aligned} [ \text{Hp} , x \in k , \supset , \quad D(u \times v) &= \lim_{y \rightarrow x} (u \times v)(y) - (u \times v)(x) / (y-x) [y, k, x] \\ &= \lim_{y \rightarrow x} (uy \times vx - ux \times vx) / (y-x) \\ &= \lim_{y \rightarrow x} (uy \times vx - vx \times ux) / (y-x) + \lim_{y \rightarrow x} (ux \times vx - vx \times ux) / (y-x) \\ &= \lim_{y \rightarrow x} (uy \times vx - vx \times ux) / (y-x) + \lim_{y \rightarrow x} (ux \times vx - vx \times ux) / (y-x) \\ &= u \times Dv + v \times Du ] \end{aligned}$$

$$\cdot 4 \quad f(k) \supset \delta f(k), g, Dg \in \mathbb{QF}(f(k)), \supset, D(gf)(x) = (Dg)(x) \times Df(x)$$

$$\begin{aligned} [ \text{Hp} , \supset , \quad D(gf)(x) &= \lim_{y \rightarrow x} (gf)(y) - (gf)(x) / (y-x) [y, k, x] \\ &= \lim_{y \rightarrow x} (gf)(y) - (gf)(x) / (y-x) \times \lim_{y \rightarrow x} (y - x) / (y-x) = Dg(x) \times Df(x) , \supset. \text{Ths} ] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{1} \quad * \quad 3.1 \quad x \in q-t(0) \quad \supset \quad D(x/x) \mid x, q-t(0), x) &= -/x^2 \\ [D(x/x) \mid x, q-t(0), x) &= \lim [ (y-x) \mid y-x) \mid y, q-t(0), x) ] \\ &= \lim [ -(y-x) \mid y-x) \mid y, q-t(0), x) ] = -/x^2 \end{aligned}$$

$$11 \quad \text{Hp 1.2} \quad 0 \in r/k \quad \supset \quad D(r) = -Dr/r^2$$

$$12 \quad * \quad * \quad * \quad D(u/r) = (rDu - uDr)/r^2$$

$$\begin{aligned} 2 \quad m \in N_1 \quad x \in q \quad \supset \quad D(x^m) \mid x, q, x) &= mx^{m-1} \\ [D(x^m) \mid x, q, x) &= \lim [ (y^m - x^m) \mid y-x) \mid y, q, x) ] \\ &= \lim [ (y^m - x^m) \mid y-x) \mid y, q, x) ] = mx^{m-1} \end{aligned}$$

$$21 \quad \text{Hp 1.2} \quad m \in N_1 \quad n \in q/k \quad \supset \quad D(n^m) = mn^{m-1} \times Du$$

$$\begin{aligned} 3 \quad m \in N_0 \quad x \in q-t(0) \quad \supset \quad D(x^m) \mid x, q-t(0), x) &= mx^{m-1} \\ [m \in N_0 \quad P.1 \quad \supset \quad P \end{aligned}$$

1

$$\begin{aligned} m \in N_1 \quad m = -n \quad \supset \quad D(x^{-n}) \mid x, q-t(0), x) &= D(x^n) \mid x, q-t(0), x) = \\ = -n x^{n-1} / x^{2n} &= -n x^{-n-1} = m x^{m-1} \end{aligned}$$

(2)

$$11 \quad (2) \quad \supset \quad P \quad ]$$

$$\begin{aligned} 4 \quad m \in N_1 \quad x \in Q \quad \supset \quad D(x^m) \mid x, Q, x) &= /m^m \mid x^{m-1} \\ [D(x^m) \mid x, Q, x) &= \lim [ (y^m - x^m) \mid y-x) \mid y, Q, x) ] \\ &= / \lim [ (y^m - x^m) \mid y-x) \mid y, Q, x) ] \\ &= [m x^{m-1} \mid x^{m-1} ] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 5 \quad m \in R \quad x \in Q \quad \supset \quad D(x^m) \mid x, Q, x) &= mx^{m-1} \\ [P.1 \quad P.4 \quad \supset \quad P \end{aligned}$$

} LEIBNIZ, *Nova methodus pro maximis et minimis itemque tangentibus... et singulare pro illis calculi genus*. Acta Erud. Lips. a.1684:

«Additio et Subtractio: si sit  $z = y + w + x$  æqu.  $c$ , erit  $d\overline{z = y + w + x}$  seu  $dz$  æqu.  $dz = dy + dw + dx$ .

Multiplicatio:  $d\overline{xy}$  æqu.  $x\overline{dy} + y\overline{dx}$ .

Potentia:  $dx^a = ax^{a-1} dx$ .

$$\text{Radices: } d\sqrt[b]{x} = \frac{a}{b} dx \sqrt[b]{x^{a-b}}$$

Sufficeisset autem regula potentiae integrae tam ad fractas tam ad radices determinandas. }

} NEWTON, *Philosophiae naturalis principia mathematica*, a.1686 t.2 p.55:

«Lemma II. Momentum genitae aequatur momentis laterum singulorum generatum in eorundem laterum indices dignitatum & coefficientia continue ductis.

Genitam voco quantitatem omnem, quae ex lateribus vel terminis quibuscumque in arithmetica per multiplicationem, divisionem, & extractionem radicum... Has quantitates, ut indeterminatas & instabiles, & quasi motu fluxu perpetuo crescentes vel decrecentes, hic considero: & earum incrementa vel decrementa momentanea sub nomine momentorum intelligo: ita ut incrementa pro momentis additiis seu affirmativis, ac decrementa

pro subductitiis seu negativis habeantur. Cave tamen intellexeris particulas finitas. Particulae finite non sunt momenta, sed quantitates ipse ex momentis genitae. Intelligenda sunt principia jamjam nascentia finitarum magnitudinum. Neque enim spectatur in hoc Lemmate magnitudo momentorum; sed prima nascentium proportio. Eodem recidit si loco momentorum uterentur vel velocitates incrementorum ac decrementorum (quas etiam motus, mutationes & fluxiones quantitatum nominare licet vel finite quaevis quantitates velocitatibus hisce proportionales. Lateris autem cujusque generantis coefficientis est quantitas, quae oritur applicando genitam ad hoc latus.

Igitur sensus lemmatis est, ut, si quantitatum quarumcunque perpetuo motu crescentium vel decrescientium  $A, B, C$ , &c. momenta, vel his proportionales mutationum velocitates dicantur  $a, b, c$ , &c. momentum vel mutatio geniti rectanguli  $AB$  fuerit  $aB + bA$ , & geniti contenti  $ABC$  momentum fuerit  $aBC + bAC + cAB$ ,... Et generaliter, ut dignitatis cujusque

$A^m$  momentum fuerit  $\frac{n}{m}aA^{\frac{n-m}{m}}$ , &c.

\* 4.  $a, b \in Q, a < b, f \in (qFa^{-b})_{\supset}$ :

1.  $x \in a^{-b}, f'x = \max f'a^{-b}, Df'x \in Q, \supset, Df'x = 0$

[ Hp. 1. §lim P2.1  $\supset, Df'x = \lim [ f'g - f'x / y - x ] g, a^{-b} \in (x - Q, x) \{1$

Hp. 2.  $y \in a^{-b} \cap (x - Q) \supset, f'g - f'x \leq 0$

$\supset, f'g - f'x / y - x \leq 0$  (2)

1. 2.  $\supset, Df'x \leq 0$  (3)

Hp. 3.  $Df'x = \lim [ f'g - f'x / y - x ] g, a^{-b} \in (x + Q, x) \{4$

$y \in a^{-b} \cap (x + Q) \supset, f'g - f'x / y - x \leq 0$  (5)

4. 5.  $\supset, Df'x \leq 0$  (6)

3. 6.  $\supset, P \}$

Ex. Dem P3

11.  $(\min | \max)P.1$

2.  $Df' \in (qFa^{-b})_{\supset}, f' \in (qFa^{-b})_{\text{cont}}$

[ Hp. 1.  $x \in a^{-b} \supset, \lim [ f'g - f'x / y - x ] g, a^{-b} \in (x) =$   
 $\lim [ f'g - f'x / y - x ] g, a^{-b} \in (y - x) \{y, a^{-b}, x \} = Df'x \times 0 = 0 \}$

3.  $Df' \in (qFa^{-b}), f'a = f'b = 0 \supset, \exists a^{-b} \cap x \exists (Df'x = 0)$

$\}$  ROLLE a.1689 p.127 :

Les racines de chaque cascade (dérivée) seront prises pour les hypotheses moyennes de la cascade suivante :

[ Hp. 1. P2  $\supset, f' \in (qFa^{-b})_{\text{cont}}$  (1)

Hp. 1. 1. § cont P1.3  $\supset, \exists t \max f'a^{-b}, \exists t \min f'a^{-b}$  (2)

Hp. 1.  $\exists Q \cap f'a^{-b} \supset, \max f'a^{-b} \in Q$   
 $x \in a^{-b}, f'x = \max f'a^{-b} \supset, x \in a^{-b}$  (3)

1. 3. P1  $\supset, \text{Ths}$  (4)

Hp. 1.  $\exists -Q \cap f'a^{-b} \supset, \exists Q \cap (-f'a^{-b}), 1. \supset, \text{Ths}$  (5)

Hp. 1.  $\exists Q \cap f'a^{-b}, \exists -Q \cap f'a^{-b} \supset, f' \in (qFa^{-b})_{\supset}, \text{Ths}$  (6)

4. 5. 6.  $\supset, P \}$

Ex. Dem P4.5

4  $Df \varepsilon qFa^{-b} \supset (fb-fa)/(b-a) \varepsilon Df \cdot a^{-b}$   
 } CAVALIERI a.1635 LVII p.15 (p.492 de l'éd. de 1653):

« Si curva linea quaecunque data tota sit in eodem plano, cui occurrat recta in duobus punctis.... poterimus aliam rectam lineam prefatae aequidistantem ducere, quae tangat portionem curvae lineae inter duos praedictos occursus continuatam... »

[ Hp.  $g = [fx-fa-x-a \mid fb-fa \mid b-a] \mid x \supset$   
 $ga=gb \Rightarrow 0$  . Dg =  $Df \cdot [fb-fa \mid b-a] \cdot P:3 \supset$   
 $\exists a^{-b} \wedge x \exists [Df \cdot x \mid fb-fa \mid b-a] \Rightarrow 0 \supset$  . This ] Ex. Dem P7

41  $f, Df \varepsilon qF(a+\theta h) \supset f(a+\theta h)-fa \varepsilon hDf(a+\theta h)$  [ = P4 ]

3  $f, Df, g, Dg \varepsilon qFa^{-b}, 0 \varepsilon Dg \cdot a^{-b} \supset$   
 $(fb-fa)/(gb-ga) \varepsilon [(Df \cdot x)/(Dg \cdot x)] \mid x \cdot a^{-b}$   
 [ Hp.  $h = [fx-fa-x-ga \mid fb-fa \mid gb-ga] \mid x \supset$   
 $ha=hb=0$  . P:3  $\supset$  . P ]

} CAUCHY *Calc. diff.* a.1829 p.37 {

Les P4,5 s'appellent : théorèmes de la moyenne .

6  $Df \varepsilon qFa^{-b} \supset f \varepsilon (qFa^{-b})_{\text{eres}}$   
 $\gg -Q \gg \gg \gg \gg \text{decr}$   
 $\gg (t0) \gg \gg \gg \gg \text{const}$  [ P4  $\supset$  P ]

\* 5.1  $a, b \varepsilon q \cdot a = b \cdot f, g \varepsilon qFa^{-b} \cdot fa = ga = 0 \cdot Dfa, Dga \varepsilon q$   
 $\cdot Dga = 0 \supset \lim f/g, a^{-b} \wedge x \exists (gx = 0), a] = (Dfa)/(Dga)$

[ Hp.  $\supset \lim [fx \mid gx] \mid x = \lim [fx-fa \mid gx-ga] \mid x$   
 $= \lim \{ [fx-fa \mid x-a] \} [gx-ga \mid x-a] \mid x$   
 $= (Dfa)/(Dga)$  ] Ex. Dem P7.1

} DE L'HOSPITAL, *Analyse des infiniment petits* a.1696 p.145:

« si l'on prend la différence du numérateur, et qu'on la divise par la différence du dénominateur, après avoir fait  $x=a$ , l'on aura la valeur cherchée » .

2  $a, b \varepsilon q \cdot a = b \cdot f, g \varepsilon qFa^{-b} \cdot fa = ga = 0 \cdot Df, Dg \varepsilon qFa^{-b} \cdot$   
 $0 \varepsilon Dg \cdot a^{-b} \supset \text{Lm}(f/g, a^{-b}, a) \supset \text{Lm}(Df/Dg, a^{-b}, a)$

[ Hp. P4:3  $\supset 0 \varepsilon g \cdot a^{-b} \supset f/g \varepsilon qFa^{-b}$  ] (1)

Hp.  $x \varepsilon a^{-b} \cdot y \varepsilon a^{-x}$  . P4:5  $\supset f/g/y \varepsilon (Df/Dg) \cdot (a^{-x})$  (2)

» » . (2)  $\supset f/g \cdot (a^{-x}) \supset (Df/Dg) \cdot (a^{-x})$  (3)

» » . (3), §2.1:31  $\supset 1$  »  $\supset 1$  » (4)

» » .  $y \varepsilon \text{Lm } f/g, a^{-b}, a$  . Df Lm  $\supset y \varepsilon A[f/g \cdot a^{-x}]$  (5)

» » » » . A (5)  $\supset y \varepsilon A[(Df/Dg) \cdot (a^{-x})]$  (6)

Hp.  $y \varepsilon \text{Lm } f/g, a^{-b}, a$  . (6)  $\supset x \varepsilon a^{-b} \supset x \cdot y \varepsilon A[(Df/Dg) \cdot (a^{-x})]$  (7)

» » » » . (7) . Df Lm  $\supset y \varepsilon \text{Lm}(Df/Dg, a^{-b}, a)$  (8)

(8)  $\supset$  P ]



21  $a, b \in q, a \equiv b, f, g \in q, f \cdot a = b, f \cdot a = g \cdot a = 0, \text{Df}, \text{Dg} \in q, f \cdot a = b,$   
 $0 \equiv \varepsilon \text{Dg} \cdot a = b, \lim(\text{Df} / \text{Dg}, a = b, a) \in q \cup \text{ax} \cup (a = x) \supset,$   
 $\lim(f/g, a = b, a) = \lim(\text{Df} / \text{Dg}, a = b, a)$   
 [ P2  $\supset$  P ] Ex. Dem P74

$$\begin{aligned} & \lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ \alpha \rightarrow \infty}} \alpha \varepsilon q \cdot f/g, D(f)/D(g) \otimes qF(u+\zeta) \cdot \lim(f, u+\zeta, \infty) = \lim(g, u+\zeta, \infty) \\ & = 0, \quad 0 = \varepsilon D(g)(u+\zeta) \cdot \lim(D(f)/D(g), u+\zeta, \infty) \otimes q \otimes \alpha \otimes q \\ & \quad u(-\infty) \cdot \lim(f/g, u+\zeta, \infty) = \lim(Df/Dg, u+\zeta, \infty) \\ & \quad \lim(f/g, u-\zeta, \infty) = \lim(f' \otimes \alpha \otimes g \otimes \alpha \otimes f \otimes \alpha \otimes g \otimes \alpha, Q, 0) \quad \text{P.21} \supset \text{P.1} \end{aligned}$$

$$4. \quad \text{a) } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = L \text{ si e solo se } \lim_{x \rightarrow a} (f(x) - L) = 0, \text{ b) } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = L \text{ si e solo se } \lim_{x \rightarrow a} |f(x) - L| = 0, \text{ c) } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = L \text{ si e solo se } \lim_{x \rightarrow a} (f(x) + L) = 2L, \text{ d) } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = L \text{ si e solo se } \lim_{x \rightarrow a} (f(x) - L)^2 = 0.$$

$$\begin{aligned} \text{S} \quad & \text{if } g \in \mathcal{G} \text{ then } \lim_{x \rightarrow 0} (f/g)(x) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x) / \lim_{x \rightarrow 0} g(x) \\ & \text{if } g \in \mathcal{G} \text{ then } \lim_{x \rightarrow 0} (f/g)(x) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x) / \lim_{x \rightarrow 0} g(x) \\ & \text{if } g \in \mathcal{G} \text{ then } \lim_{x \rightarrow 0} (f/g)(x) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x) / \lim_{x \rightarrow 0} g(x) \end{aligned}$$

\* 6.  $k \in \text{Cls} q, k \supset \delta k, m \in X_1, n, r \in n, D' r \in q \cap k, n \in q, \supset$ .

$$(1) \quad D^{(r)}(u+v) = D^{(r)}u + D^{(r)}v \quad (2) \quad D^{(r)}(uv) = uD^{(r)}v$$

•3.  $D^*(a \times c) = \Sigma [C(m, r)(D^*(a) \times (D^*(c) \mid r, 0 \cdots m))$   
 { LEIBNIZ *MathS.* t.5 p.380 }

$$4. \text{ If } (f, g) \in \mathcal{E} \text{ then } \mathcal{D}_r(f, g) = \mathcal{D}_r(f, h) \cup \mathcal{D}_r(h, g). \quad \square$$

Si  $u$  est une fonction définie F, a signification D<sup>m</sup>  $u$ , par §+ 10:9, Si  $f$  est une opération f, la P.4 simplifie un peu les formules.

$$\begin{array}{ccccccc} \mathfrak{A} & \mu\mathcal{E}(\mu) + X_n, \mu\mathcal{E}(\mathfrak{q}) & \supset & \mathbb{I}^m(\mu, \mathfrak{q}, \mu) & = & H[(\mu - 0) \cdots (\mu - 1)] \times \mu^{-m} \\ & \mu\mathcal{E}(\mathfrak{q}), \mu\mathcal{E}(\mathfrak{q}) & \supset & \{\} & \supset & \mu & \supset \\ & \mu\mathcal{E}(\mathfrak{q}), \mu\mathcal{E}(\mathfrak{q}(\mathfrak{q})) & \supset & \mathfrak{q}(\mathfrak{q}) & \supset & \mu & \supset \end{array}$$

$$6 \quad \mathcal{E}_q \supset \bigcup_{m! \leq q} D^m[r^m(1-r)^m, r, q, r] = \\ \bigcup_{m! \leq q} (-1)^m [C(m, r)]^2 r^r (1-r)^{m-r}, 0 \leq m \leq q$$

\*  $\forall a, b \in \mathcal{E}_1, a \equiv b, f, g \in \mathcal{K}^1 \mathcal{A}^1 b, m \in \mathbb{N}_1, fa = \mathcal{D}^m fa = \mathcal{D}^2 fa = \dots = \mathcal{D}^m fa = \emptyset, \mathcal{D}^{m-1} fa \in \mathcal{E}_1, ga = \mathcal{D} ga = \mathcal{D}^2 ga = \dots = \mathcal{D}^m ga = \emptyset, \mathcal{D}^{m-1} ga \in \mathcal{E}_1 \cap \mathcal{D}, \lim(f/g, a^{\perp} b, a) = (\mathcal{D}^{m-1} fa) / (\mathcal{D}^{m-1} ga)$

$$\begin{aligned} [\text{Hp}, \text{P5.2.1} \supset, \lim f^*g, a^{-b}, a] &= \lim \text{D}f^* \text{D}g, a^{-b}, a \\ &= \lim \text{D}f^* \text{D}^2g, &= \dots \\ &= \lim \text{D}^m f^* \text{D}^m g, &= \text{D}^{m+1} f^* \text{D}^{m+1} g a] \end{aligned}$$

\* 8.  $a, b \in \mathbb{Q} \cdot a = b \cdot x \in a - b \cdot m \in \mathbb{N}_1 \cdot f, Df, D^2f, \dots, D^{m-1}f \in \mathbb{Q} F a - b$   
 $\cdot D^m f x \in \mathbb{Q} \cdot \bigcup \cdot \lim [ \{ f(x+h) - \sum [h^r / r! (D^r f x) \mid r, 0 \dots (m-1) \} ] /$   
 $h^m [h, a - b - x, 0] = (D^m f x) / m!$

$$\left[ \left( \{ f(x+h) - \sum [h^r / r! D^r f x \mid r, 0 \dots (m-1) \} [h, h^m | h] \right) \right. \\ \left. \left( \begin{array}{c} f \\ f' \end{array}, g \right) \right] \text{ P7 } \supset \text{ P } \quad \}$$

} Joh. BERNOULLI a.1694 t.1 p.126:

\* habetur hæc series generalissima :

$$Integr. natz = +nz - \frac{zdz}{1.2.dz} + \frac{z^3dz}{1.2.3.dz^2} - \frac{z^5dz}{1.2.3.4.dz^3} \&c. \quad * \quad \}$$

} TAYLOR a.1715 p.21 :

« Sint  $z$  et  $x$  quantitates duae variables, quarum  $z$  uniformiter augetur per data incrementa  $\dot{z}$ , et sit  $nz = v$  . . . . .

p.23: . . . quo tempore  $z$  uniformiter fluendo fit  $z \dot{+} v$ , fiet  $x$ ,

$$x + \dot{x} \frac{v}{1z} + \ddot{x} \frac{v^2}{1.2z^2} + \ddot{\ddot{x}} \frac{v^3}{1.2.3z^3} + \&c. \quad * \quad \}$$

} MACLAURIN a.1742 p.610 :

« Suppose that  $y$  is any quantity that can be expressed by a series of this form  $A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + \&c.$  where  $A, B, C$  represent invariable coefficients . . . . . When  $z$  vanishes, let  $E$  be the value of  $y$ , and let  $\dot{E}, \ddot{E}, \ddot{\ddot{E}}, \&c.$  be then the respective values of  $\dot{y}, \ddot{y}, \ddot{\ddot{y}}, \&c.$   $z$  being supposed to flow uniformly. Then

$$y = E + \frac{\dot{E}z}{\dot{z}} + \frac{\ddot{E}z^2}{1 \times 2 \dot{z}^2} + \frac{\ddot{\ddot{E}}z^3}{1 \times 2 \times 3 \dot{z}^3} + \&c.$$

p.611: This theorem was given by Dr. Taylor.

p.612: which theorem is not materially different from Mr. Bernoulli's. \* }

} ARBOGAST a.1800:

$$F(a+x) = Fa + \frac{DFa}{1}x + \frac{D^2Fa}{1.2}x^2 + \frac{D^3Fa}{1.2.3}x^3 + \text{etc.} \quad \}$$

Note.

La P8 s'appelle généralement « formule de Taylor », et pour  $x = 0$ , « formule de Maclaurin », bien que déjà énoncée par Joh. Bernoulli.

La signification du « etc » a été douteuse. Le second membre n'est pas la somme d'une série ; car la série peut être divergente ou avoir une somme différente du premier membre.

Nous avons donné cette interprétation de la formule dans les notes à « Genocchi, *Calcolo differenziale* a.1884 p.XIX ; trad. allemande p.321 », Mathesis a.1889 p.110, TorinoA. a.1891.

On peut remarquer dans les citations le développement du symbolisme.

Ex. de la P8: §planOscul 2-1.

Continuation: P9 §§ 21-1 §q<sub>n</sub> 33-2



- 2  $a, b \varepsilon q, a \equiv b, f, D^2 f \varepsilon qFa^{-1}b, m, n \varepsilon Q, \supset,$   
 $f[(ma+nb)/(m+n)] = (mfa+nfb)/(m+n) \varepsilon$   
 $-(b-a)^2 mn(m+n)^{-2}/2 D^2 f(a-b) \quad [P:1 \ m=2 \ \supset, P]$
- 3  $\Pi p \ P:2, D^2 f \varepsilon QFa^{-1}b, r \varepsilon N_1+1, z \varepsilon (a^{-1}bF1^{r-1})eres,$   
 $m \varepsilon QF1^{r-1}, \supset, f[(\Sigma m z)/(\Sigma n)] < (\Sigma m f z)/(\Sigma n)$

$\lim \Sigma \ \S 11.$

- 1  $a, h \varepsilon q, f \varepsilon qF(a+\Theta h), l' \text{ mod } D^n f, r|(n, r) (N_1: a+\Theta h) \varepsilon Q,$   
 $\supset, f(a+h) = \Sigma \{h^r/r! D^r f a|n, N_0\}$
- 2  $k \varepsilon \text{Cls}'q, k \supset \delta k, f \varepsilon qf(k; N_0) : n \varepsilon N_0, x \varepsilon k, \supset_{k, x, D[f(z, n)]z}$   
 $k, x \varepsilon q : \Sigma \{l' \text{ mod } D[f(z, n)|z, k, z] | z \in k|n, N_0\} \varepsilon Q : x \varepsilon k : \supset,$   
 $D_l \Sigma [f(z, n)|n, N_0]|z, k, x\} = \Sigma \{D[f(z, n)|z, k, x]|n, N_0\}$   
 $\} \text{Comm}(D, \Sigma) \}$

Continuation:  $\S S \ 20 \ \S e \ 4 \ \S \log \ 4 \ \S q_n \ 31 \ \S \text{Subst} \ 11 \ \S q' \ 11.$





\* 3.  $f, g \in \text{qf}(\theta), (f', \theta), (f'', \theta), (f''', \theta), (f''', \theta) \in \text{eq} \Rightarrow \bigcup$ .

•0  $S'(f, \theta), S(f, \theta) \in \text{Mod } f(\theta)$

•01  $S(f, \theta) \in \text{eq} \Rightarrow S(f, \theta) \in \text{Mod } f(\theta)$

•1  $S'(f+g, \theta) \subseteq S'(f, \theta) + S'(g, \theta)$  •11  $(S'_i, \leq) \leq (S'_j, \leq)$  P.1

•12  $S(f, \theta), S(g, \theta) \in \text{eq} \Rightarrow S(f+g, \theta) = S(f, \theta) + S(g, \theta)$

•2  $S'(f, \theta) = S'[f(1-c)]_{c, \theta}$  •21  $(S'_i, S'_j) \leq 2$

•22  $S(f, \theta) \in \text{eq} \Rightarrow S(f, \theta) = S[f(1-c)]_{c, \theta}$

•3  $S'(-f, \theta) = -S'_f(\theta)$  •31  $(S'_i | S'_j) \leq 3$

•32  $S(f, \theta) \in \text{eq} \Rightarrow S(-f, \theta) = -S(f, \theta)$

•4  $m \in \mathbb{Q} \Rightarrow S'(mf, \theta) = mS'(f, \theta)$  •41 ————4

•42  $S(f, \theta) \in \text{eq}, m \in \mathbb{Q} \Rightarrow S(mf, \theta) = mS(f, \theta)$

•5  $x \in \theta \Rightarrow c, f, c > g, c \Rightarrow S'(f, \theta) \geq S'(g, \theta)$  •51 ————5

•6  $g \in \text{Qf}(\theta) \Rightarrow$

$(f', \theta) \times S'(g, \theta) \geq S'(f \times g, \theta) \geq S(f \times g, \theta) \geq (f', \theta) \times S'_j(g, \theta)$

P.6 = " premier théorème de la moyenne ". Il est à peu près évident ; les conditions restrictives ont été précisées par Dirichlet a.1837 t.1 p.138 ; voir aussi M.A. a.1874 t.7 p.605, JdM. a.1874 s.2 t.3 p.293....

•7  $g \in \text{qf}(\theta) \text{ cres} \Rightarrow$

$\exists \theta \in \mathbb{R} [ S'(f \times g, \theta) = (g\theta)S'(f, \theta) + (g1)S'_j(f, 1-\theta) ]$

•71  $(S'_i | S'_j) \leq 7$  } BONNET JdM. a.1849 p.249 {

} WEIERSTRASS (voir du Bois-Reymond JfM. a.1868 t.69 p.82) {

P.7-71 = " second théorème de la moyenne ". Il est ici simplifié.

\* 4.

•1  $f \in \text{qf}(\theta) \text{ cres}_0 \Rightarrow S(f, \theta) = \prod_{i=1}^n [f(\rho_i/n)]_{\rho, 0 \leq (n-1) \leq [n \cdot N_1}$

$= 1_{\rho} \quad \text{si} \quad 1 \leq \rho \leq [n \cdot N_1$

•2  $\text{decr}_0 \Rightarrow S(f, \theta) = \prod_{i=1}^n \quad \text{si} \quad \rho \leq 0 \leq (n-1) \leq [n \cdot N_1$

$= 1_{\rho} \quad \text{si} \quad 0 \leq (n-1) \leq [n \cdot N_1$

•3  $\text{Hp}1 \wedge \text{Hp}2 \Rightarrow S(f, \theta) \in \text{eq}$

† \* 5.1  $m \in \mathbb{N}_0 \Rightarrow S(\rho^m)_{\rho, \theta} = \rho(m+1)$

} B. CAVALIERI a.1639 p.524: se in un parallelogrammo, descritto il diametro, intenderemo tirare parallele ad un lato di esso quante se ne possono tirare, indefinitamente di qua e di là prolungate, la parte di esse che resta nel parallelogrammo, cioè per parlare nella lingua usata in essa geometria tutte le linee del parallelogrammo saranno doppie di tutte le linee comprese in uno dei fatti triangoli. Tutti i quadrati del parallelogrammo saranno tripli di tutti i quadrati dello stesso triangolo. Tutti i cubi saranno quadrupli di tutti i cubi. Tutti i biquadrati saranno quintupli di tutti i biquadrati (intendo sempre quelli del parallelogrammo di





Les intégrales définies par les P1-2-3-6-8 s'appellent "intégrales singulières Cauchy, ou impropres". Dans le cas où les Df3-6 ne sont pas applicables, Cauchy considère encore la "valeur principale" de l'intégrale, qui, selon Riemann, n'a pas grande utilité.

$\lim \sum \ast 11-0 \quad f(x) \text{ (qf} Q_0) \text{ de } x \in \mathbb{D} : \sum f(N_0) \varepsilon Q = S(f, Q_0) \varepsilon Q$   
 } MACLAURIN a.1742 p.289 {  
 [ Hp,  $n \in N_0 \Rightarrow \sum f(0 \dots n) > S[f(0 \dots n-1)] > \sum f(0 \dots n+1) - f(0) \Rightarrow$  Ths ]

\*1  $f(x) \text{ (qf} (\theta; N_0)) \Rightarrow \sum f' \bmod [f(x, y) \mid x, y \in \theta] \varepsilon Q \Rightarrow$

$S(\sum [f(x, y) \mid x, y \in \theta] \mid x, y \in \theta) \leq \sum S[f(x, y) \mid x, y \in \theta] \mid x, y \in \theta$

\*11  $(S, \leq) \mid (S', \leq) \text{ P1}$

\*12 Hp P1 :  $x \in N_0 \Rightarrow S[f(x, y) \mid x, y \in \theta] \varepsilon Q \Rightarrow$

$S[\sum [f(x, y) \mid x, y \in \theta] \mid x, y \in \theta] = \sum S[f(x, y) \mid x, y \in \theta] \mid x, y \in \theta \mid \text{Comm}(S, \sum)$

} WEIERSTRASS : voir THOMÉ JfM a.1866 t.66 p.334, t.71

p.353 ; DARBOUX a.1875 p.82 ;

Si tous les termes d'une série sont des fonctions continues ou discontinues susceptibles d'intégration, et si la série est uniformément convergente dans un intervalle donné  $a, b$ , la fonction que représente la série, et qui n'est pas nécessairement continue, sera susceptible d'intégration. Son intégrale sera la somme des intégrales de tous ses termes. ...

Nous avons remplacé la condition de la convergence uniforme par une autre plus simple. Voir §lim 19.

\*2  $S(x^n \mid x, y \in \theta) = 1 - 2^{-2} + 3^{-2} - \dots = .783 \dots$

} Joh. BERNOLLI, a.1694 t.1 p.185 {

\*3  $x \varepsilon Q \Rightarrow S(x^{-p, x} \mid x, y \in \theta) = \sum [n! (p+1)^{- (p+1)} \mid x, y \in \theta]$

} EULER a.1768 t.1 p.144 : (que ob concinnitatem terminorum omnino est notatu digna. ...)

cont \* 12.

\*1  $f(x) \text{ (qf} \theta) \text{ cont } \Rightarrow S(f, \theta) \varepsilon Q$  } DARBOUX a.1875 p.74 {

\*11 Hp1  $\Rightarrow S(f, \theta) = \lim \sum [f(x, y) \mid x, y \in \theta]$

\*2  $k \varepsilon \text{Cls}^* q, k = \delta k, a \varepsilon k, f(x) \text{ (qf} (k; \theta)) \text{ cont } \Rightarrow$

$\lim S[f(x, y) \mid y, \theta] \mid x, k, a' = S[f(a, y) \mid y, \theta]$  } Comm lim, S {

\*21 Hp2  $\Rightarrow S[f(x, y) \mid y, \theta] \mid x \varepsilon \text{ (qf} k) \text{ cont}$

\*3  $f(x) \text{ (qf} (\theta; \theta)) \text{ cont } \Rightarrow S(S[f(x, y) \mid x, y \in \theta] \mid y, \theta) =$

$S(S[f(x, y) \mid y, \theta] \mid x, y \in \theta)$

Sur l'inversion des intégrations voir O. Stolz, Grundzüge der Differential- und Integralrechnung, t.3 a.1899.



$$^{\circ}1 \quad a, h \varepsilon q \cdot n \varepsilon N_1 \cdot f, D^n f \varepsilon [qF(a + \theta h)] \text{cont.} \supset.$$

$$f(a + h) = \sum [h^r / r! D^r f(a + \theta_r, 0 \dots, n-1)] +$$

$$h^n / (n-1)! S[(1-\theta)^{n-1} D^n f(a + \theta h)] [t, \theta]$$

$$\} \text{LAGRANGE a.1798 Th des fonctions Anal. p.42; (Euvres t.9 p.73)}$$

$$\{ [f(a + \theta h) - f(a)] : f \in P^0 \supset P \}$$

$$* \quad ^{\circ}2 \quad ^{\circ}1 \quad f \varepsilon qF\theta \cdot D^2 f \varepsilon (a)F\theta \supset, Sf = (f'0 + f'1)/2 = f(1/2)$$

$$^{\circ}2 \quad f \varepsilon qF\theta \cdot D^3 f \varepsilon (a)F\theta \supset, Sf = (f'0 + 4f'2 + f'1)/6 \\ = [(f'0 + 3f'(1/3)) + 3f'(2/3) + f'1]/8$$

$$^{\circ}3 \quad \gg \quad \gg \quad D^4 f \quad \gg \quad \supset.$$

$$Sf = [7f'0 + 32f'(1/4) + 12f'(2/4) + 32f'(3/4) + 7f'1]/90$$

$$= [19f'0 + 75f'(1/5) + 50f'(2/5) + 50f'(3/5) + 75f'(4/5) + 19f'1]/288$$

$$^{\circ}4 \quad f \varepsilon qF\theta \cdot D^5 f \varepsilon (a)F\theta \supset, Sf = [41f'0 + 216f'(1/6) + 27f'(2/6) \\ + 27f'(3/6) + 27f'(4/6) + 216f'(5/6) + 41f'1]/840 = \{751[f'0 + f'1] + \\ 3577[f'(1/7) + f'(6/7)] + 1323[f'(2/7) + f'(5/7)] + 2989[f'(3/7) + f'(4/7)]\}/17280$$

$$^{\circ}5 \quad f \varepsilon qF\theta \cdot D^6 f \varepsilon (a)F\theta \supset, Sf = \{989[f'0 + f'1] + 5888[f'(1/8) + \\ f'(7/8)] - 928[f'(2/8) + f'(6/8)] + 10496[f'(3/8) + f'(5/8)] - 4540f'(4/8)\}/28350 \\ = \{2857[f'0 + f'1] + 15741[f'(1/9) + f'(8/9)] + 1080[f'(2/9) + f'(7/9)] + \\ 19344[f'(3/9) + f'(6/9)] + 5778[f'(4/9) + f'(5/9)]\}/89600$$

$$^{\circ}6 \quad f \varepsilon qF\theta \cdot D^7 f \varepsilon (a)F\theta \supset, Sf = \{16067[f'0 + f'1] + 106300[ \\ f'(1/10) + f'(9/10)] - 48525[f'(2/10) + f'(8/10)] + 272400[f'(3/10) + f'(7/10)] \\ - 260550[f'(4/10) + f'(6/10)] + 427368f'(5/10)\}/598752 = \dots$$

$$\} \quad ^{\circ}2-6 \text{ COTES a.1722 } Opuscula \text{ p.33 \{}$$

$$* \quad 23.$$

$$^{\circ}1 \quad f, D^2 f \varepsilon qF\theta \supset, S(f, \theta) = f(1/2) \varepsilon (D^2 f \cdot \theta)/24$$

$$^{\circ}2 \quad \gg \quad \gg \quad \gg \quad S(f, \theta) = (f'0 + f'1)/2 \varepsilon -(D^3 f \cdot \theta)/12$$

$$^{\circ}3 \quad f, D^3 f \varepsilon qF\theta \supset,$$

$$S(f, \theta) = [f'0 + 4f'(1/2) + f'1]/6 \varepsilon -(D^4 f \cdot \theta)/(4! \cdot 5!)$$

Les P22 sont dites "formules de quadrature". Nous avons donné les expressions P23 des restes dans les "*Applicazioni geometriche* a.1887".

Continuation : §e 5 , §log 5 , §q, 40 , §Subst 14 , §q' 21.

## §76 e

$$\begin{aligned}
 / \uparrow Q \lim * 1.0 \quad e &= \lim[(1+/m)^m | m, Q, \infty] & \text{Df} \\
 \cdot 01 \quad e &= l[(1+/m)^m | m, Q] & \text{Dfp} \\
 [ \quad \S Q 61.3 \quad \supset. (1+/m)^m | m \varepsilon Q \text{ cres. } \S \text{lin } 1.5 \quad \supset. P \quad ] \\
 \cdot 02 \quad e \varepsilon Q & [ m, n \varepsilon Q. \S Q 61.7 \quad \supset. (1+/m)^m < (1+/n)^{n+1} \quad \supset. P ] \\
 \cdot 03 \quad e &= l_j[(m+1)/m]^{m+1} | m, Q \{ = l_j[(1-/m)^{-m} | m, (1+Q)] \\
 \cdot 1 \quad m \varepsilon Q \quad \supset. (1+/m)^m &< e & [ P \cdot 01 \supset P ] \\
 \cdot 11 \quad \text{-----} & e < (1+/m)^{m+1} & [ P \cdot 03 \supset P ] \\
 \cdot 2 \quad 2 < e < 3 & [ (1/m) P \cdot 1. (5/m) P \cdot 11 \quad \supset. P ] \\
 e &= 2.71828 18284 59045 23536 02874 71352 66249 77572 \\
 &47093 69995 95749 66967 62772 40766 30353 54759 \\
 &45713 82178 52516 64274 27466 39193 20030 59921 \\
 &81741 35966 29043 57290 03342 95260 59563 07381 \\
 &32328 62794 34907 63233 82988 07531 95251 01901 \\
 &15738 34187 93070 21540 89126 94937 99405 34631 \\
 &93819 87250 90567 36251 50082 37715 27509 03586 \\
 &67692 05047 15575 85094 92906 45748 86005 84299 \\
 &93465 94757 59371 00435 26480 0...
 \end{aligned}$$

Le nombre « e » a été calculé: jusqu'à 12 chiffres décimaux par:

R. Cotes, *Logometria*, a.1714 p.11: il l'appelle « Ratio Modularis »;  
à 23 chiffres par Euler, *Petr.C.* a.1739 p.187, qui l'a indiqué par « e »;  
à 42 chiffres par Vega, *Thesaurus logarithmorum*, a. 1794, p. 309;  
à 188 chiffres par W. Shanks, *LondonP.* t.6 a.1854 p.397;  
et enfin jusqu'à 346 chiffres par:

M. Boorman, *Math. Magaz.*, t.I, a.1884, p.204.

$e = 1.1111111111111111$  (expression de e dans le système binaire)

$$\begin{aligned}
 \cdot 3 \quad e, e^2 \varepsilon Q \cdot R & \quad \{ \text{EULER a.1737 Petr.C. t.9 p.98 } \} \\
 \cdot 31 \quad x \varepsilon R \cdot 0 \quad \supset. e^x \cdot \varepsilon R & \quad \{ \text{LAMBERT a.1761 p.265 } \} \\
 \cdot 32 \quad e \cdot \varepsilon R \pm \sqrt{R} & \quad \{ \text{LIOUVILLE JdM. a.1840 t.5 p.193 } \} \\
 \cdot 4 \quad x \varepsilon Q \cdot 0 \quad \supset. e^x > 1+x & \\
 [ \quad x \varepsilon Q. (x/m) P \cdot 1 \quad \supset. (1+x)^m/x < e \quad \supset. \text{Ths} \\
 \quad x \varepsilon -Q. x > -1. (-x-1)/m P \cdot 11 \quad \supset. \text{Ths} \\
 \quad x \varepsilon -Q. 1+x < 0 \quad \supset. \text{Ths} ] \\
 \cdot 41 \quad x \varepsilon 0 \quad \supset. e^x < \wedge (1-x) & \quad [ (-x)/x P \cdot 4 \supset P ]
 \end{aligned}$$

$$^{\circ}5 \quad x \varepsilon \mathbb{Q} \quad \bigcup. \lim (1+x/n)^n | n = e^x$$

{ EULER Berol. Misc. a.1743 t.7 p.177:

$$\bullet e^x = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \text{ existente } n \text{ numero infinito. } \bullet$$

$$^{\circ}6 \quad \lim [(e^x - 1)/x | x, q, 0] = 1$$

$$^{\circ}61 \quad \lim n / {}^n\sqrt{(n!)} | n = e$$

$$^{\circ}62 \quad \lim {}^n\sqrt{[(2n)! / (n!n)]} | n = 4/e$$

$\Sigma \quad \ast \quad 2.$

$$^{\circ}1 \quad x \varepsilon \mathbb{Q} \quad \bigcup. e^x = 1 + x + x^2/2! + x^3/3! + \dots = \Sigma(x^n/n! | n, X_0)$$

{ NEWTON, 13 junii. a. 1676:

$\bullet (\text{Area hyperbolae}) = \frac{x}{b} + \frac{xx}{2abb} + \frac{x^3}{6aab^2} + \frac{x^4}{24a^2b^3} + \frac{x^5}{120a^3b^4}$  etc. ubi coefficients denominatorum multiplicando terminos hujus arithmeticae progressionis. 1. 2. 3. 4. 5 etc. in se continuo; et hinc ex logarithmo dato potest numerus ei competens inveniri.  $\bullet$

{ LEIBNIZ, 27 Aug. 1676:

«Si sit numerus aliquis Unitate minor  $1-n$ , ejusque Logarithmus Hyperbolicus  $l$ , erit  $m = \frac{l}{1} - \frac{l^2}{1 \cdot 2} + \frac{l^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} - \frac{l^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}$  etc. Si numerus sit major Unitate, ut  $1+n$ , tunc pro eo inveniendū mihi etiam prodit Regula, quae in Newtoni Epistola expressa est: scilicet erit  $n = \frac{l}{1} + \frac{l^2}{1 \cdot 2} + \frac{l^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{l^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}$  etc.  $\bullet$

$$\{ \text{P15 } \bigcup. e^x = \lim (1+x/m)^m | m = \lim \Sigma [C(m, x, x^r) (m^r/r, X_0)]^m = \lim \Sigma [1 - s/m | s, 0 \dots r-1] e^x | r! | r, X_0]^m = \Sigma e^x | r! | r, X_0] \}$$

$$^{\circ}2 \quad e = 1 + \Sigma/(N_1!) = \Sigma(1/n! | n, X_0) \quad [ \text{P1 } x=1 \bigcup. P ] \quad \text{Dfp}$$

$$^{\circ}3 \quad n \varepsilon X_1 \quad \bigcup. e = \Sigma(1/r! | r, 0 \dots n) \varepsilon \theta / (n!n)$$

{ FOURIER: Voir Saintville, *Mélanges d'Analyse*, a.1815 p.339; CAUCHY a.1821 p.118 }

$$^{\circ}4 \quad n \varepsilon X_1, a \varepsilon \mathbb{R} \quad 1 \dots n \quad \bigcup. e^n + \Sigma(a_j e^{n-j} | j, 1 \dots n) = 0$$

{ HERMITE a.1873 ParisCR. t.77; cfr. GORDAN a.1893 MA. t.43 }

$$E \beta \quad \ast \quad 3.1 \quad E e = 2 \quad E/\beta e = 1$$

$$n \varepsilon X_1 \quad \bigcup. E/\beta^{3n-1} e = 2n \quad E/\beta^{3n} e = E/\beta^{3n-1} e = 1$$

{ COTES *Logometria*, p.7:

«Dividatur ... 2.71828 &c. per 1. ... & rursus minor per numerum qui reliquus est, & hic rursus per ultimum residuum, atque ita porro pergatur; & prodibunt quotientes 2, 1, 2, 1, 1, 1, 1, 6, 1, 1, 8, 1, 1, 10, 1, 1, 12, 1, 1, 14, 1, 1, 16, 1, 1, &c.

$$^{\circ}2 \quad n \varepsilon X_1 \quad \bigcup. E(\beta)^n [e-1](e+1) = 2+4(n-1)$$

{ EULER a.1748 p.319 }

$$D \quad * \quad 4.1 \quad x \varepsilon q . \bigcup . D(e^x | x, q, x) = e^x$$

$$\cdot 2 \quad a \varepsilon q . x \varepsilon qFq . Dx = ax . t \varepsilon q . \bigcup . xt = (x0) \mathfrak{q}N(at)$$

Continuation : §Subst 14.1

$$S \quad * \quad 5.1 \quad S(e^{-x} | x, Q) = 1 \quad \cdot 11 \quad a \varepsilon Q . \bigcup . S(e^{-a.x} | x, Q) = /a$$

$$\cdot 2 \quad n \varepsilon Q . \bigcup . S(e^{-x.x^n} | x, Q) = nS(e^{-x.x^{n-1}} | x, Q)$$

$$\cdot 21 \quad n \varepsilon N_0 . \bigcup . S(e^{-x.x^n} | x, Q) = n!$$

$$\cdot 22 \quad n \varepsilon N_0 . a \varepsilon Q . \bigcup . S(e^{-a.x.x^n} | x, Q) = n!/a^{n+1}$$

$$\cdot 3 \quad n \varepsilon N_0 . x \varepsilon Q_0 . \bigcup . e^x S(e^{-z.z^n} | z, x+Q) = n! \Sigma(x^r/r! | r, 0 \cdots n)$$

$$\cdot 4 \quad n \varepsilon N_0 . x \varepsilon Q_0 . \bigcup .$$

$$xe^x S(e^{-z/z} | z, x+Q) = \Sigma[(-1)^r r! x^{-r} | r, 0 \cdots (n-1)] \varepsilon \theta(-1)^n n! x^{-n}$$



$$\cdot 31 \quad \log 2 = 2[ /3 + / (5 \times 3^5) + / (7 \times 3^7) + \dots ] \quad [ P.3. x=1. \supset; P ]$$

$$\cdot 4 \quad \log[(a+b)^{-2}] = (\log a + \log b)^{-2} + \sum_i [(a-b)/(a+b)]^n / n! \quad [n, N_1]$$

$$\cdot 5 \quad {}^{19}\log e = /(\log 10) = 0.43429448 \dots$$

Ce nombre, dit « module des logarithmes décimaux » a été calculé avec 282 chiffres par Adams, London P. a.1878 p.93.

$$\cdot 6 \quad m \in N_1. \supset. \lim \Sigma / (n^{\dots m} n) \quad [n = \log m]$$

$$\cdot 61 \quad m, n \in N_1. m < n. \supset. \lim \Sigma / (m p^{\dots n} p) \quad [p = \log(m/n)]$$

{ Joh. BERNOULLI II a.1729 CorrM. t.2 p.309:

« Si l'on coupe la progression harmonique  $1/x \dots$  en deux parties ... soit la raison du nombre des termes dans la première et seconde partie comme  $m$  à  $n$ , la somme de tous les termes de cette seconde partie sera  $= \log[(m+n)/n]$ . » }

$$\cdot 7 \quad a \in Q \neq 1. x \in Q. \supset. {}^{\prime}\log x = ({}^{\prime}\log e) \log x = (\log x) / (\log a)$$

$$\cdot 8 \quad a \in (e \backslash - / e)^{-1}. \supset.$$

$$\lim (a!)^{n-1} \quad [n = \Sigma (n+1)^{n-1} (\log a)^n / n! \quad |n, N_0]$$

{ EULER PetrA. a.1777 t.1 }

{ EISENSTEIN JfM. a.1844 t.27 p.51:

$$a^{in inf.} = 1 + \log a + 3 \frac{(\log a)^2}{2!} + 4^2 \frac{(\log a)^3}{3!} + \text{etc.}$$

und dieses Resultat gilt

$$\text{von } a = \frac{1}{e} = 0,6922 \dots \text{ (excl.)} \quad \text{bis } a = 1 \text{ (incl.)} . \}$$

$$Np \quad * \quad 3.1 \quad a \in \theta. \supset.$$

$$\lim \{ [\text{Num}(Np \wedge 2^{\dots n}) - \Sigma / \log^{\dots} (2^{\dots n})] \times n! (a + /2) \} \quad [n = 0]$$

{ JENSEN AM. a.1899 t.22 p.364 }

$$\cdot 2 \quad n \in N_1. \supset.$$

$$\lim \{ [\text{Num}(Np \wedge 1^{\dots x})] \cdot x - \Sigma [n! / (\log x)^{n+1} \mid n, 0^{\dots n}] \} (\log x)^{n+2} \quad [x = (n+1)!]$$

{ TCHEBYCHEF JdM. a.1848 t.17 p.384 }

$$D \quad * \quad 4.1 \quad x \in Q. \supset. D(\log, Q, x) = /x$$

$$[ D(\log, Q, x) = \lim \{ [\log(x+h) - \log x] / h \mid h, Q-x, 0 \}$$

$$= \lim \{ [\log(1+h/x)] / h \quad \gg \quad \gg \quad \gg$$

$$= /x \times \lim \{ \log(1+h/x) \mid x/h \gg \quad \gg \quad \gg \quad \gg \} = /x ]$$

$$\cdot 11 \quad a \in Q \neq 1. x \in Q. \supset. D({}^{\prime}\log x \mid x, Q, x) = {}^{\prime}\log e / x$$

$$\cdot 2 \quad a \in Q. x \in q. \supset. D(a^x \mid x, q, x) = a^x \log a$$

$$\cdot 21 \quad Hp \cdot 2. n \in N_1. \supset. D^n(a^x \mid x, q, x) = a^x (\log a)^n$$

$$\cdot 3 \quad x \in Q. n \in N_1. \supset. D^n(\log, Q, x) = (-1)^{n-1} (n-1)! \cdot x^{-n}$$

$$\cdot 4 \quad x \in Q. n \in N_1. \supset.$$

$$D^n(\log x / x \mid x, Q, x) = (-1)^n n! \cdot x^{-n-1} [1 - \Sigma / (1^{\dots n})]$$

$$S \quad * \quad 5.1 \quad a, b \in Q. a < b. \supset. S(/, a^{-1} b) = \log(b/a)$$



## §78. C

$$\sum \lim \log C$$

0.  $C = \lim \sum (1 \dots n) - \log n \left( \frac{1}{n} \right)$  Df  
 1.  $C = \lim \sum (1 \dots n) - \log n \left( \frac{1}{n} \cdot N_1 = 1 \right) \sum [1 \dots (n+1)] - \log n \left( \frac{1}{n} \cdot N_1 \right)$   
 2.  $C = 0$

57721 56649 01532 86060 65120 90082 40243 10421 59335 93392  
 35988 05767 23488 48677 26777 66467 09369 47033 29174 67435  
 14631 44724 98070 82480 96050 40144 86542 83622 41739 97644  
 92353 62535 00333 74293 73377 37673 94279 25952 58247 09491  
 60087 35203 94816 56708 53233 15177 66115 28621 19950 15079  
 84793 74508 569...

La constante  $C$  a dans l'analyse la plus grande importance, après les constantes  $\pi$  et  $e$ .

Elle est dite "constante d'Euler", et quelques fois "de Mascheroni".

Euler, PetrC., a.1734-35 t.7 p.156 l'a indiquée par  $C$ ; dans d'autres cas par  $O$ ; Mascheroni par  $A$ . Plusieurs A. l'indiquent par  $\gamma$ ; notation qu'on ne rencontre pas dans Euler, ni dans Mascheroni contrairement à l'opinion de plusieurs A..

Euler, ibid. a calculé  $E 10^6 C$ , ensuite il a calculé  $E 10^{10} C$  dans a.1744 CorrM. t.1 p.283; et  $E 10^{15} C$  dans PetrNC. a.1769 t.14 I p.154.

Mascheroni, a.1790 a calculé  $E 10^{19} C$ .

Gauss, a.1812 *Werke*, t.3 p.154 . . . 23 .

Nicolai, . . . 45 .

Glaisher, LondonP. a.1871 t.19 p.54 . . . 100 .

Adams, a.1878 t.28 p.88 . . . 263 .

$$3. C = \sum N_1^{-2}/2 - \sum N_1^{-3}/3 + \dots = \sum (-1)^n (\sum N_1^{-n}/n) (n, N_1+1)$$

$$4. C = \sum \sum (N_1+1)^{-n} (n-1)/n (n, N_1+1) \\ \} 3.4 \text{ EULER PetrNC. a.1769 p.154 }$$

$$5. 1-C = \sum \sum (N_1+1)^{-n}/n (n, N_1+1) \\ \} \text{EULER PetrA. a.1781 t.5 II p.45 }$$

Continuation §B 3.

## QUATRIÈME PARTIE

## NOMBRES COMPLEXES

§80  $\mathbf{q}_n =$  (nombre complexe d'ordre  $n$ )

- $\mathbf{q} \ast 1 \cdot 0 \quad n \in \mathbf{N}_1 \quad \supset \quad \mathbf{q}_n = \mathbf{qF}(1 \cdots n) \quad \text{Df}$
- $n \in \mathbf{N}_1 \quad a, b, c \in \mathbf{q}_n \quad h, k \in \mathbf{q} \quad \supset \quad$
- 01  $(a_1, a_2, \dots, a_n) = a \quad \text{Df}$
  - 02  $a = b \quad \text{:=} \quad r \in 1 \cdots n \quad \supset \quad a_r = b_r \quad [\text{§F P.5} \quad \supset \quad \text{P}]$
  - 1  $a + b = r \mathbf{q}_n \wedge x \in (r \in 1 \cdots n \quad \supset \quad x_r = a_r + b_r)$   
 $\quad \quad \quad = [(a_r + b_r) \mid r, 1 \cdots n] \quad \text{Df}$
  - 11  $(a_1, a_2, \dots, a_n) + (b_1, b_2, \dots, b_n) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \dots, a_n + b_n) \quad [\text{=P.1}]$
  - 12  $a + b = b + a \quad a + (b + c) = (a + b) + c = a + b + c$
  - 2  $0 = r[(r \in \mathbf{F}(1 \cdots n))] = (0, 0, \dots, 0) \quad \text{Df} \quad \cdot 21 \quad a + 0 = a$
  - 3  $-a = r \mathbf{q}_n \wedge x \in (a + x = 0) \quad \text{Df} \quad \cdot 31 \quad -0 = 0$
  - 32  $-(a_1, a_2, \dots, a_n) = (-a_1, -a_2, \dots, -a_n)$
  - 33  $a - b = a + (-b) \quad \text{Df} \quad \cdot 34 \quad a - a = 0$
  - 4  $ha = r \mathbf{q}_n \wedge x \in (r \in 1 \cdots n \quad \supset \quad x_r = ha_r) \quad \text{Df}$
  - 41  $h(a_1, a_2, \dots, a_n) = (ha_1, ha_2, \dots, ha_n) \quad ha \in \mathbf{q}_n \quad 1a = a$   
 $h(a + b) = ha + hb \quad (h + k)a = ha + ka \quad h(ka) = (hk)a = hka$

$\ast 2. \quad \mathbf{q}_n \quad \text{unit}$

$n \in \mathbf{N}_1 \quad r \in 1 \cdots n \quad \supset$

•0  $\text{unit}(n, r) = r \mathbf{q}_n \wedge x \in (x_r = 1 : s \in (1 \cdots n) - r \quad \supset \quad x_s = 0) \quad \text{Df}$   
 $a, b \in \mathbf{q}_n \quad h \in \mathbf{q} \quad \supset$

•1  $a = \Sigma [a_s \text{unit}(n, s) \mid s, 1 \cdots n]$

•2  $a + b = \Sigma [(a_s + b_s) \text{unit}(n, s) \mid s, 1 \cdots n] \quad \text{Dfp}$

•3  $ha = \Sigma [(ha_s) \text{unit}(n, s) \mid s, 1 \cdots n] \quad \text{Dfp}$

*Note.* Le nombre complexe d'ordre  $n$  est le système de  $n$  nombres réels. Nous définissons la somme de deux complexes, le complexe 0, l'opération —, et la multiplication d'un complexe par un nombre réel. (P1.1.2.3.4).

L'unité d'ordre  $n$  et de rang  $r$ , indiquée par «  $\text{unit}(n, r)$  », est le complexe dont l'élément de rang  $r$  est 1, et tous les autres sont nuls. (P2.0).

Weierstrass les appelle " Haupteinheiten ". Les nombres  $a_1, a_2, \dots, a_n$  sont les " coordonnées " du complexe  $a$ .

La P30 définit le module d'un complexe.

Ces opérations très simples suffisent pour appliquer les nombres complexes à la simplification de plusieurs théories. Il n'y a pas une multiplication simple de deux complexes. H. Grassmann a considéré les divers genres de multiplication dans JfM. a.1855 p.123: le plus important est le produit alterné, qui conduit aux Dtrm. La multiplication se présente naturellement dans les Subst.

La nomenclature sur ces sujets,  $q_n$  et Subst., est très variée chez les différents A.

$$\begin{aligned} \text{mod} & \quad * 3. \quad n \in N_1, x, y \in q_n, n \in q_1, \supset. \\ & \quad \cdot 0 \quad \text{mod } x = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2} = \sqrt{\Sigma(x_i^2)} \quad \text{Df} \\ & \quad \cdot 1 \quad \text{mod } x \in Q_n \quad \cdot 2 \quad \text{mod } x + y \leq \text{mod } x + \text{mod } y \\ & \quad [ \S \text{P20-1} \supset. (x_1^2 + x_2^2 + \dots + y_1^2 + y_2^2 + \dots) \geq x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots ] \\ & \quad \text{P30} \supset. \quad \text{mod } x \text{ mod } y \geq x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots \\ & \quad \supset. \quad (\text{mod } x)^2 + (\text{mod } y)^2 \geq 2 \text{ mod } x \text{ mod } y \geq (x_1 + y_1)^2 + (x_2 + y_2)^2 + \dots \\ & \quad \supset. \quad (\text{mod } x + \text{mod } y)^2 \geq (\text{mod } x + y)^2 \supset. \text{Ths } \cdot \\ & \quad \cdot 3 \quad \text{mod } ax = \text{mod } a \text{ mod } x \quad \cdot 4 \quad \text{mod } x = 0 \implies x = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Num} & \quad * 4. \quad n \in N_1, \supset. \text{Num } q_n = \text{Num } q \\ & \quad \} \text{G. CANTOR JfM. a.1877 p.242: AM. a.1883 a.315 } \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Med} & \quad * 5. \quad n \in N_1, n \in \text{Cls}' q_n, \supset. \quad \cdot 0 \quad \text{Med } a = \\ & \quad q_n \wedge x3) a \in q_n, \supset. \Sigma(a, x, y, r, 1 \dots n) \in \text{Med}[\Sigma(a, x, y, r, 1 \dots n) \in \text{Med}] \quad \text{Df} \\ & \quad \text{Ex. P33-1-2.} \\ & \quad (q_n \mid q) \S \text{Med P1-1-2-4-5, P2-1-2-3-4-1, P3-1-4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lambda \mid 1 & \quad * 11. (q_n \mid q) \S \lambda \text{ P10-33} \\ & \quad * 12. \text{-----} \text{P2-1-2-6} \\ & \quad * 13. n \in \text{Cls}' q_n, \supset. \quad \cdot 0 \quad x \in Aa \implies \text{mod } a = x \quad \text{Df} \\ & \quad \cdot 1 \quad Aa = \lambda a \vee [(a \wedge x) \wedge Aa] \quad \text{Df} \quad \cdot 2 \quad \lambda a = q \wedge Aa \\ \delta & \quad * 14. (q_n \mid q) \S \delta \\ \text{Int} & \quad * 15. \text{-----} \S \text{Int} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Lm} & \quad * 21. m, n \in N_1, n \in \text{Cls}' q_m, x \in \delta n, f \in q_m f n, \supset. \quad \S \text{Lm P40-7} \\ & \quad \cdot 8 \quad a \in q_m, \supset. a \in \text{Lm}(f, a, x) \implies 0 \in \text{Lm}[\text{mod}(fy - a)[y, a, x]] \\ & \quad \cdot 9 \quad x \in \text{Lm}(f, a, x) \implies x \in \text{Lm}(\text{mod } f, a, x) \\ & \quad * 22. (q_n \mid q) \S \text{Lm P5} \\ & \quad * 23. m, n \in N_1, n \in \text{Cls}' q_m, \text{mod } a = x, f \in q_n f n, \supset. \quad \S \text{Lm P6-1} \end{aligned}$$

lim 24. Hp P21  $\supset$  §lim P20.4

5  $x = \lim(f, u, r) \equiv x = \lim(\text{mod } f, u, r)$

6  $a \in q_m \supset: a = \lim(f, u, r) \equiv 0 = \lim(\text{mod } (fy-a) [y, u, r])$

\* 25.1  $a \in q_1 \text{ f } N_0, \Sigma(\text{mod } u, N_0) \varepsilon Q \supset: \Sigma(u, N_0) \varepsilon q_n$

2  $m \in N_1, a \varepsilon Q + m \supset: \Sigma[(\text{mod } r)^n [r, mF1 \dots m) - 0] \varepsilon Q$

} EISENSTEIN, *Mathematische Abhandlungen* a.1847 p.217:

Die  $r$ -fache Reihe

$$\sum_{m_1, m_2, m_3, \dots, m_r} \frac{1}{(m_1^2 + m_2^2 + m_3^2 + \dots + m_r^2)^\mu}$$

in welcher alle indices  $m_1, m_2, m_3, \dots, m_r$  alle ganze Werthe von  $-\infty$  bis  $\infty$  durchlaufen mit Ausschluss der einen Combination

$$m_1 = 0, m_2 = 0, \dots, m_r = 0,$$

convergiert, wenn  $\mu > \frac{1}{2}r$  ist {

cont \* 30.  $m, n \in N_1, u \varepsilon \text{Cls } q_n, u \supset \delta u \supset: \S \text{cont P}0.1$

2  $f(\text{mod } u) \varepsilon Q, u = \delta u, f \varepsilon (q_m \text{ f } u) \text{cont} \supset: \exists t \max \text{mod } f^u$

3 Hp2  $\supset: \lambda f^u = f^u$

4  $\exists (q_m \text{ f } q) \text{cont} \wedge \exists (f^u = q_m)$

} MA. a.1890 t.37 p.132; HILBERT a.1891 MA. t.38 p.459:

MOORE AmericanT. a.1900 p.72 {

D \* 31.  $k \varepsilon \text{Cls } q, k \supset \delta k, u \in N_1, f \varepsilon q_n \text{ f } k, x \varepsilon k \supset: \S D P1$

\* 32.  $k \varepsilon \text{Cls } q, k \supset \delta k, u \in N_1, u, r, D^u, D^r \varepsilon q_n \text{ F } k, a \varepsilon q \supset:$

1  $D(u+r) = Du + Dr$  2  $Dau = aDu$

3  $0 \varepsilon r \text{ f } k \supset: D \text{mod } u = \Sigma(u \times Du_r [r, 1 \dots u) / \text{mod } u$

\* 33.1  $a, b \varepsilon q, a \equiv b, n \in N_1, f, Df \varepsilon q_n \text{ f } a^{-b} \supset:$

$(f(b-fa)/(b-a) \varepsilon \text{Med } Df^*(a-b))$

34.\*1

$a, b \varepsilon q, a \equiv b, m, n \in N_1, f \varepsilon q_1 \text{ F } a^{-b}, x \varepsilon a^{-b}, D^m f x \varepsilon q \supset: \S D P8$

2 Hp 1,  $m \in N_1, D^m f \varepsilon q_n \text{ F } a^{-b}, h \varepsilon a^{-b} - x \supset: f(x+h) - \Sigma[(h^m - r!) D^r f(x) [r, 0 \dots (m-1)] \varepsilon h^{m-m!} \text{Med } D^m f^*(x + \theta h)$

\* 35.1  $u \in N_1, f \varepsilon q_n \text{ f } (q_n \text{ f } q) \text{cont}, a \varepsilon q_n, b \varepsilon q \supset:$

$\exists (c, g) \exists [c \varepsilon b + Q, g \varepsilon q_n \text{ f } (b^{-c}), gb = a; t \varepsilon b^{-c} \supset: D_t(g, b^{-c}, t) = f(gt, t)]$

L'équation  $D(g, b^{-c}, t) = f(gt, t)$  représente un système de  $n$  équations différentielles, réduit à forme normale, Cauchy, *Exercices* a.1840 p.327, a démontré l'existence de la fonction  $g$ , en supposant la continuité des dérivées de  $f$ ; Lipschitz BD. a.1876 p.149 a remplacé cette condition par

une autre moins restrictive. Nous avons supprimé cette condition, et donné la démonstration symbolique de la P.1, et d'autres semblables, dans « Démonstration de l'intégrabilité des équations différentielles ordinaires », M.A. a.1890 t.37 p. 182. Voir aussi Torino.A. a.1886, Ann.X. a.1892 p.289, Encyclopédie t.2 p.195.

$$S \quad * \quad 40. \quad a, b \in q, \quad a < b, \quad n \in N_1, \quad f \in q \quad f a^{-b}, \quad f \bmod f a^{-b} \in q, \quad \supset, \\ \S \S \text{ P1.0 } 2.43.5 \quad 3.01.12.22.32.42$$

$$* \quad 41. \quad n \in N_1, \quad x \in q, \quad f(\theta), \quad S(x, \theta) \in q, \quad \supset, \quad \bmod S(x, \theta) \leq S(\bmod x, \theta) \\ \S \S \text{ 11.12 } 12. \quad 20. \quad 21.$$

$$* \quad 42.0 \quad n \in N_1, \quad \supset, \quad \theta_n = \theta F(1 \cdots n) \quad \text{Df} \\ \text{1} \quad m, n \in N_1, \quad f \in q, \quad F q, \quad f \bmod [q \cap \{x \in f, x = 0\}] \in q, \quad \supset, \\ S f = \{q \cap \{x \in f, x \in q\} \supset h, \quad x \in h^n \supset [Med f, [h(p + \theta_n)]] | p, n \in 1 \cdots n\} \quad \text{Df} \\ \text{2} \quad n \in Cl s' q, \quad f \bmod n \in q, \quad f \in q, \quad f' \in q, \quad \supset, \\ S(f, n) = S \{q \cap F q, n\} \cap g \{x \in f, x \in q, x = n\} \supset, \quad g, n = f' : x \in q, x = n\} \supset, \quad g, n = 0) \\ \text{Df}$$

P.1. Soient  $m$  et  $n$  des nombres entiers, et  $f$  un nombre complexe d'ordre  $m$  fonction d'un nombre complexe d'ordre  $n$ ; c'est-à-dire considérons l'ensemble de  $m$  fonctions de  $n$  variables. Supposons encore que pour des valeurs suffisamment grandes des variables, la fonction soit constamment nulle. Alors pour avoir l'intégrale de  $f$ , indiquée par  $Sf$ , fixons une quantité positive  $h$ , arbitrairement petite, et divisons l'espace à  $n$  dimensions en cubes de côté  $h$ . Un sommet d'un cube aura pour coordonnées une suite  $p$  de nombres entiers multipliés par  $h$ . L'ensemble des points de ce cube sera représenté par  $(p + \theta_p) h$ , où  $\theta_p$  indique le complexe d'ordre  $n$  dont toutes les coordonnées sont des  $\theta$ . Formons la somme des valeurs moyennes (Med) de la fonction dans tous les cubes, et multiplions-la par  $h^n$ , volume du cube. S'il y a une et une seule valeur  $z$  appartenant à toutes ces sommes,  $z$  sera dite l'intégrale cherchée.

P.2. Soit  $u$  une classe de  $q_p$ , limitée; et soit  $f$  une fonction définie dans cette classe. Par  $Sf, u$ , intégrale de  $f$  étendue à l'ensemble  $u$ , on indique l'intégrale de la fonction  $g$  définie pour toutes les valeurs des variables, qui dans l'ensemble  $u$  coïncide avec  $f$ , et au dehors de  $u$  est nulle.

Nous n'avons pas la possibilité d'analyser ici la très vaste théorie des intégrales multiples.

## §81 Dtrm = (déterminant)

$\vdash \Sigma H \text{ Num sgn } q \text{ } * 1 \cdot 0 \text{ } m \in N_1, u \in (1 \cdots m F 1 \cdots m) \text{ sim } \bigcup$   
 $\text{sgn } u = (-1)^{\vdash \text{ Num}[(x,y) \beta(x,y \in 1 \cdots m, x < y, u x > uy)]}$  Df  
 $\cdot 01 \text{ } m \in N_1, u, v \in (1 \cdots m F 1 \cdots m) \text{ sim } \bigcup, \text{sgn } uv = (\text{sgn } u) \times (\text{sgn } v)$

Soit  $u$  une correspondance réciproque ou permutation des nombres  $1 \cdots m$ ;  $\text{sgn } u$  indique l'unité positive ou négative, selon que le nombre des couples  $(x,y)$  qui forment inversion, est pair ou impair.

$\cdot 1 \text{ } m \in N_1, u \in qF(1 \cdots m : 1 \cdots m) \bigcup$   
 $\text{Dtrm } u = \Sigma \{ \text{sgn } u H[u(r,u_r) | r, 1 \cdots m] | u, (1 \cdots m F 1 \cdots m) \text{ sim } \}$  Df  
 } LEIBNIZ a.1678 MathS. t.7 p.5 :

Inveni Canonem pro tollendis incognitis quotcumque aequationes non nisi simplici gradu ingredientibus... Fiant omnes combinationes possibles literarum coefficientium, ita ut nunquam concurrant plures coefficientes ejusdem incognitae et ejusdem aequationis. Hae combinationes affectae signis, ut mox sequetur, componantur simul... Lex signorum haec est. Uni ex combinationibus assignetur signum pro arbitrio, et caeterae combinationes quae ab hac differunt coefficientibus duabus, quatuor, sex etc., habebunt signum oppositum ipsius signo; quae vero ab hac differunt coefficientibus tribus, quinque, septem etc., habebunt signum idem cum ipsius signo. (

*Note.* Soit  $m$  un nombre, et soit  $a$  une lettre, qui munie de deux indices entiers compris entre 1 et  $m$ , représente une quantité.

Plusieurs A. écrivent les valeurs de  $a$  sur  $m$  lignes horizontales composées de  $m$  éléments, et appellent « matrice » cette figure carrée.

Soit  $u$  une permutation des nombres  $1 \cdots m$ ; considérons le produit des valeurs  $a(r,u_r)$ , où  $r$  varie de 1 à  $m$ ; multiplions-le par  $\text{sgn } u$ , c'est-à-dire par l'unité positive ou négative, selon que la permutation  $u$  a un nombre pair ou impair d'inversions. La somme de tous ces produits, lorsque l'on remplace  $u$  par toutes les permutations des nombres de 1 à  $m$ , s'appelle « le déterminant des  $a$  », que nous abrégons en  $\text{Dtrm } a$ .

Quelques A. appellent « déterminant » la matrice; alors  $\text{Dtrm } a$  est dite « la valeur du déterminant ».

Voici quelques noms d'usage commun :

Élément  $(r,s)$  du déterminant  $a \equiv a_{r,s}$ .

Ligne (Zeile)  $s$ -ième  $\equiv a_{r,s} | r \dots$ . Colonne  $r$ -ième  $\equiv a_{r,s} | s$ .

Terme principal  $\equiv H a_{r,r} | r, 1 \cdots n$ .

$a$  déterminant symétrique  $\equiv: r,s \in 1 \cdots n \bigcup, a_{r,s} = a_{s,r}$ .

» » hémisymétrique  $\equiv: r,s \in 1 \cdots n \bigcup, a_{r,s} = -a_{s,r}$ .

» gauche, skew, schife  $\equiv: r,s \in 1 \cdots n, r \neq s \bigcup, a_{r,r} = 0$ .

$$*11 \quad \text{Hp}1 \quad \supset \quad \text{Dtrm}[a(r,s) \mid (s,r)] = \text{Dtrm}a$$

$$\text{Hp}1 \quad , \quad a \in \quad -2 \quad (1^{m,m} \text{ F } 1^{m,m}) \text{sim} \quad \supset,$$

$$\text{Dtrm} \, a(r, r) \mid (r,s) = \text{sgn} \, a \times \text{Dtrm}a$$

$$*3 \quad m, n \in \mathbb{N}_1 \quad , \quad a, r \in \text{Cls} \, \mathbb{N}_1 \quad , \quad \text{Num} \, a = \text{Num} \, r = n \quad , \quad a \in \text{qf}(1^{m,r}) \quad \supset,$$

$$\text{Dtrm}(a, a(r)) = \text{Dtrm}[a(\min \, a, \min \, r) \mid (r,s), 1^{m,n}; 1^{m,n}] \quad \text{Def}$$

$$*4 \quad \text{Hp}1 \quad , \quad r \in 1^{m,n} \quad \supset,$$

$$\text{Dtrm}a = \sum (-1)^{-\lambda_{r,s}} \text{Dtrm}(a, 1^{m,n} - r \mid 1^{m,n} - rs) \mid (s, 1^{m,n}) \quad \text{ } \} \text{ CRAMER a.1750 p.656 } \{$$

$$*5 \quad \text{Hp}1 \quad , \quad a \in \text{Cls} \, 1^{m,n} \quad , \quad a \cap \quad \supset,$$

$$\text{Dtrm}a = \sum_i (-1)^i (\sum a + \sum r) \times \text{Dtrm}(a, a(r)) \times \text{Dtrm}(a, 1^{m,n} - a \mid 1^{m,n} - r) \mid (r, (\text{Cls} \, 1^{m,n}) \cap r3(\text{Num} \, r = \text{Num} \, a)) \quad \text{ } \} \text{ LAPLACE ParisM. a.1772 p.267 } \{$$

$\text{Dtrm} \, a, a(r)$ , qui figure dans la P5 est dit "subdeterminant, déterminant partiel, ...".

$$*6 \quad \text{Hp}1 \quad \supset \quad \text{Dtrm}[(-1)^{m-1} \text{Dtrm}(a, 1^{m,n} - r \mid 1^{m,n} - rs) \mid (r,s), 1^{m,n}; 1^{m,n}] = (\text{Dtrm}a)^{m-1}$$

$$\quad \text{ } \} \text{ CAUCHY JP. a.1812 p.82 } \{$$

$$* \quad 2.1 \quad a, b \in \text{qf}(1^{m,m}; 1^{m,m}) \quad \supset,$$

$$\text{Dtrm}a \times \text{Dtrm}b = \text{Dtrm}[\sum(a_{r,t} b_{s,t} \mid t, 1^{m,m}) \mid (r,s), 1^{m,m}; 1^{m,m}] \quad \{$$

$$*2 \quad m, n \in \mathbb{N}_1 \quad , \quad m > n \quad , \quad a, b \in \text{qf}(1^{m,m}; 1^{m,n}) \quad \supset,$$

$$\text{Dtrm}[\sum(a_{r,t} b_{s,t} \mid t, 1^{m,m}) \mid (r,s), 1^{m,n}; 1^{m,n}] =$$

$$\sum \{ \text{Dtrm}(a, r \mid 1^{m,n}) \times \text{Dtrm}(b, r \mid 1^{m,n}) \mid r, (\text{Cls} \, 1^{m,m}) \cap r3(\text{Num} \, r = n) \} \quad \text{ } \} \text{ BIXET a.1813 p.287 :}$$

• ... Avec des  $x', x'', x'''$ , &c.,  $y', y'', y'''$ , &c.,  $z', z'', z'''$ , &c., ayant formé  $n - \frac{n-1}{2} - \frac{n-2}{3}$  résultantes à trois lettres, et aussi d'autres résultantes avec des  $\xi, \nu, \zeta$ , semblablement accentués, on trouve que la somme des produits des résultantes correspondantes...

$$\begin{aligned} \sum(x, y', z') \sum(\xi, \nu', \zeta') &= \sum x \xi \sum y' \nu' \sum z' \zeta' + \sum y \xi \sum x' \nu' \sum z' \zeta' + \sum z \xi \sum x' y' \sum \nu' \zeta' \\ &\quad + \sum x \xi \sum y' \nu' \sum z' \zeta' + \sum y \xi \sum x' \nu' \sum z' \zeta' + \sum z \xi \sum y' \nu' \sum x' \zeta' \end{aligned}$$

Ce dernier membre est de la forme  $(x, y', z'')$ ; on en peut donc conclure que le produit d'un nombre quelconque de fonctions, telles que  $\sum(x, y', z'')$ ,  $\sum(\xi, \nu', \zeta'')$  est de la forme  $(x, y', z'')$ .

$$*3 \quad m, n \in \mathbb{N}_1 \quad , \quad m < n \quad , \quad a, b \in \text{qf}(1^{m,m}; 1^{m,n}) \quad \supset,$$

$$\text{Dtrm}[\sum(a_{r,t} b_{s,t} \mid t, 1^{m,m}) \mid (r,s), 1^{m,n}; 1^{m,n}] = 0$$

\* 3.1  $m \in N_1 + 1$ .  $a \in qf(1 \cdots m)$ .  $\supset$ .

$\text{Dtrm}[a_{r^{m-s}}](r, s), 1 \cdots m : 1 \cdots m] = H\{H[(a_r - a_s)s, 1 \cdots (r-1)] | r, 2 \cdots m\}$   
 } VANDERMONDE ParisM. a.1772 p.518; CAUCHY a.1821 p.426 }

\* 2  $m \in N_1 + 1$ .  $\supset$ .  $\text{Dtrm}[r^s](r, s), 1 \cdots m : 1 \cdots m] = H(r! | r, 1 \cdots m)$

\* 3  $\text{Hp} 1$ .  $\supset$ .  $\text{Dtrm}\{\Sigma(a, N_1 \wedge r / N_1 \wedge s / N_1) | (r, s), 1 \cdots m : 1 \cdots m\}$   
 $= H(a, 1 \cdots m)$  } MAXSON Corr.N. t.4 a.1878 p.109 }

Dvr mlt  $\Phi$  \* 4.  $m \in N_1 + 1$ .  $\supset$ .

\* 1  $\text{Dtrm}(\text{Dvr}, 1 \cdots m : 1 \cdots m) = H(\Phi, 1 \cdots m)$

—————  $= m! H\{(1-p) \text{NE}(m/p) | p, Np \wedge 1 \cdots m\}$   
 } SMITH a.1876 t.2 p.161:

« Let  $(m, n)$  denote the greatest common divisor of the integral numbers  $m$  and  $n$ ; and let  $\varphi(m)$  be the number of numbers not surpassing  $m$  and prime to  $m$ ; the symmetrical determinant...

$$\Sigma_{\pm}(1, 1) (2, 2) \dots (m, m)$$

is equal to  $\varphi 1 \times \varphi 2 \times \dots \times \varphi(m)$ . » }

\* 2  $\text{Dtrm}\{\text{mlt}, 1 \cdots m : 1 \cdots m\} = m! H\{(1-p) \text{NE}(m/p) | p, Np \wedge 1 \cdots m\}$   
 } SMITH a.1876 t.2 p.163 }

lim \* 6.  $a \in qf(N_1 : N_1)$ .  $\supset$ .

\* 0  $\text{Dtrm}(a, N_1 : N_1) = \lim \text{Dtrm}(a, 1 \cdots n : 1 \cdots n) | n$  Df

\* 1  $H(\text{mod } ar, r | r, N_1) \in Q$ .  $\Sigma[\text{mod } a, (N_1 : N_1) \wedge (r, s) \exists (r \neq s)] \in Q$ .  $\supset$ .  
 $\text{Dtrm}(a, N_1 : N_1) \in q$  } KOEN AM. t.15 p.53, t.16 p.217 }

D \* 7.1  $a, b \in q$ .  $a < b$ .  $f, g, h, Df, Dg, Dh \in qFa \neg b$ .  $\supset$ .

$\exists a \neg b \wedge x \exists \{ \text{Dtrm}[(Df, r, Dg, r, Dh, x), (fa, ga, ha), (fb, gb, hb)] = 0 \}$

[  $k = \text{Dtrm}[f, r, g, x, h, x), (fa, ga, ha), (fb, gb, hb)] | x$ .  $\supset$ .

$ka = kb = 0$ . §D P4.3.  $\supset$ . P ]

Continuation : §Subst 5 . §q' 8.



## §82 lin Subst Sb

$$+ \times q_{\omega} \text{ cont } * 1, m, n, p \in N_1, \supset, \text{ so } f \varepsilon (q \text{ Fq}) \text{ lin } := \\ f \varepsilon (q_{\omega} \text{ Fq}_{\omega}) \text{ cont } : x, y \varepsilon q_{\omega} \supset x, y, f(x+y) = fx + fy \quad \text{D1}$$

P1-0. Nous dirons que  $f$  est un complexe d'ordre  $m$ , fonction linéaire des complexes d'ordre  $n$ , si la fonction de la somme est la somme des fonctions correspondantes. Nous ajoutons la condition que la fonction soit continue pour en déduire la P1-19.

Les fonctions linéaires s'appellent aussi distributives.

Nous définissons P-2 la somme de deux fonctions linéaires, qui est une fonction de la même espèce.

Le produit P-3 des fonctions a été déjà défini dans §6. Il a nécessairement les propriétés distributive et associative, mais non la commutative.

$$\begin{aligned} & f, g, h \varepsilon (q \text{ Fq}) \text{ lin } : x, y \varepsilon q_{\omega} \supset, \quad \text{D1} \quad f(x+y) = fx + fy \\ & \text{P1} \quad f(0) = 0 \quad [ \text{P1} : y=0 \supset, f'x \neq 0 = f'x - f'0 \supset, \text{P} ] \\ & \text{P12} \quad k \varepsilon N_1, u \varepsilon q_{\omega} \text{ F1} \cdots k \supset, f' \Sigma u = \Sigma f'u \quad [ \text{P1} \supset \text{P} ] \\ & \text{P13} \quad k \varepsilon N_1 \supset, f(kx) = kf'x \quad [ \text{P12} : u = 1 \text{ of F1} \cdots k \supset, \text{P} ] \\ & \text{P14} \quad f \neg x = -f'x \quad [ \neg x = y \text{ P1} : \text{P11} \supset, 0 = f'x - f' \neg x \supset, \text{P} ] \\ & \text{P15} \quad k \varepsilon n \supset, f'kx = kf'x \quad [ \text{P13} : \text{P11} \supset, \text{P} ] \\ & \text{P16} \quad k \varepsilon N_1 \supset, f(x \cdot k) = (f'x) \cdot k \quad [ x \cdot k = x ] \text{P13} \supset, \text{P} ] \\ & \text{P17} \quad k \varepsilon N_1, l \varepsilon n \supset, f'(l \cdot k)x = (l \cdot k)f'x \quad [ \text{P15} : \text{P16} \supset, \text{P} ] \\ & \text{P18} \quad k \varepsilon r \supset, f'kx = kf'x \quad [ = \text{P17} ] \\ & \text{P19} \quad k \varepsilon q \supset, \text{-----} \quad [ \text{Hp} \supset, f \varepsilon q_{\omega} \text{ Fq}_{\omega} \text{ cont } \supset, \\ & \quad f'kx = \lim[f'lx \cdot l, r, k] = \lim lfx \cdot l, r, k = kf'x ] \\ & \text{P2} \quad f+g = (f'x+g'x) \cdot x \quad \text{Df} \quad \text{P21} \quad f+g \varepsilon (q \text{ Fq}) \text{ lin} \\ & [ \text{Hp} : x, y \varepsilon q_{\omega} \supset, (f+g)'x \cdot y = f'x \cdot y + g'x \cdot y = f'x \cdot f'x' \cdot y + g'x \cdot y \\ & \quad = f'x \cdot y \cdot x + f'g \cdot y \cdot y = f'x \cdot y \cdot x + f'g \cdot y \cdot y ] \\ & \text{P22} \quad f+g = g+f \quad \text{P23} \quad (f+g)+h = f+(g+h) = f+g+h \\ & f, f' \varepsilon (q_{\omega} \text{ Fq}_{\omega}) \text{ lin } : g, g' \varepsilon (q_{\omega} \text{ Fq}_{\omega}) \text{ lin } : k \varepsilon q \supset, \quad \text{P3} \quad gf' \varepsilon (q_{\omega} \text{ Fq}_{\omega}) \text{ lin} \\ & [ \text{Hp} : x, y \varepsilon q_{\omega} : \text{§P2-2} \supset, g(f'x \cdot y) = g[f'x \cdot y] = g[f'x] \cdot fy = g[f'x] \cdot \\ & \quad g \cdot fy = gf'x \cdot y + gf'g \cdot y ] \\ & \text{P31} \quad g(f+f') = gf+gf' : (g+g')f = gf+g'f \\ & \text{P4} \quad k = (k \times, q) \quad \text{Df} \quad \text{P41} \quad k \varepsilon (q \text{ Fq}) \text{ lin} \quad \text{P42} \quad fh = kf' \\ & \text{La multiplication par un nombre réel est une fonction linéaire.} \\ & \text{P5} \quad fx = \Sigma \{ f' \text{unit}(u, v) \cdot x_v \mid v, 1 \cdots n \} \end{aligned}$$

\* 2.0  $n \in N_1 \rightarrow \text{Subst } q_n = (q_n F q_n) \text{ lin}$  Df

P2.0. Nous appelons « Substitution des  $q_n$  », abrégé en « Subst  $q_n$  » tout  $q_n$  fonction linéaire des  $q_n$ . Nous définissons le module d'une substitution, et (P6) l'exponentielle d'une substitution.

Les substitutions ont une grande importance dans plusieurs théories. Une exposition moins sommaire est contenue dans mon « Calcolo geometrico » a.1888 p.144-170. Ici elles ont principalement pour but d'introduire les nombres imaginaires.

$n \in N_1 \rightarrow a, b, c \in \text{Subst } q_n \rightarrow h \in q_1 \rightarrow x, y \in q_n \rightarrow$

$$\cdot 1 \quad a(x+y) = ax + ay \quad a+b \in \text{Subst } q_n \rightarrow (a+b)x = ax + bx$$

$$\cdot 2 \quad a+b = b+a \quad a+(b+c) = (a+b)+c = a+b+c$$

$$\cdot 3 \quad (ab)x = a(bx) \quad ab \in \text{Subst } q_n$$

$$\cdot 4 \quad a(b+c) = ab+ac \quad (a+b)c = ac+bc \quad (ab)c = a(bc) = abc$$

$\vdash \cdot 5 \quad m \in N_1 \rightarrow a^m \in \text{Subst } q_n$

mod \* 3.  $n \in N_1 \rightarrow a, b \in \text{Subst } q_n \rightarrow x \in q_n \rightarrow h \in Q \rightarrow$

$$\cdot 0 \quad \text{mod } a = \max \{ [(\text{mod } ax)/(\text{mod } x)] \mid x \in (q_n - \{0\}) \} \quad \text{Df}$$

$$\cdot 1 \quad \text{mod } a \in Q_n$$

$$[x \in q_n - \{0\} \rightarrow y = x/\text{mod } x] \rightarrow$$

$$y \in q_n \rightarrow \text{mod } y = 1 \rightarrow (\text{mod } ax)/\text{mod } x = (\text{mod } ay)/\text{mod } y \quad (1)$$

$$\cdot 1) \rightarrow (\text{mod } ax)/\text{mod } x [x \in (q_n - \{0\})] = (\text{mod } ax)/\text{mod } x [x \in (q_n \cap y \in \text{mod } y = 1)] \quad (2)$$

$$\{ (\text{mod } ax)/\text{mod } x \mid x \in Q_{\text{of}}[q_n \cap y \in \text{mod } y = 1] \} \text{cont} \quad (3)$$

$$\cdot 3) \rightarrow \S \text{cont P1.3 } \cdot 2) \rightarrow \text{P.0} \rightarrow \text{P} \}$$

$$\cdot 11 \quad \text{mod } ax \leq \text{mod } a \text{ mod } x \quad [\text{P.0} \rightarrow \text{P.1} \rightarrow \text{P}]$$

$$\cdot 12 \quad \text{mod } a = 0 \rightarrow a = 0$$

$$\cdot 2 \quad \text{mod}(a+b) \leq \text{mod } a + \text{mod } b$$

$$[ \text{Hp} \rightarrow x \in q_n \rightarrow \text{P2.1} \rightarrow \text{mod}(a+b)x = \text{mod}(ax+bx)$$

$$\text{-----} \rightarrow \S q_n \text{ P3.2} \rightarrow \text{-----} \leq \text{mod } ax + \text{mod } bx$$

$$\text{-----} \rightarrow \text{P.11} \rightarrow \text{-----} \leq \text{mod } a \text{ mod } x + \text{mod } b \text{ mod } x$$

$$\leq (\text{mod } a + \text{mod } b) \text{ mod } x \quad (1)$$

$$\text{Hp} \rightarrow (1) \rightarrow x \in q_n \rightarrow (\text{mod}(a+b)x)/\text{mod } x \leq \text{mod } a + \text{mod } b \quad (2)$$

$$(2) \rightarrow \text{P.0} \rightarrow \text{P} \}$$

$$\cdot 21 \quad \text{mod } ka = k \text{ mod } a$$

$$\cdot 3 \quad \text{mod}(ab) \leq \text{mod } a \text{ mod } b$$

$$[ \text{Hp} \rightarrow x \in q_n \rightarrow \text{P.1} \rightarrow$$

$$\text{mod}[(ab)x] = \text{mod}[a(bx)] \leq \text{mod } a \text{ mod } bx \leq \text{mod } a \text{ mod } b \text{ mod } x$$

$$\text{Hp} \rightarrow x \in q_n \rightarrow (\text{mod}(ab)x)/\text{mod } x \leq \text{mod } a \text{ mod } b : \text{P.0} \rightarrow \text{P} \}$$

$$\cdot 4 \quad m \in N_1 \rightarrow \text{mod}(a^m) \leq (\text{mod } a)^m \quad [\text{P.3} \rightarrow \text{P}]$$

Sb \* 4.  $n \in \mathbb{N}_1, u, v \in \text{qF}(1^{***}n; 1^{***}n) \rightarrow \bigcup.$

\*0  $\text{Sb}u = \{ \mid \Sigma(\mu_{r,s} v_s \mid s, 1^{***}n \mid v, 1^{***}n) \mid, v, \text{q}_u \}$  Df

Soit  $u$  une matrice carrée d'ordre  $n$ . Par  $\text{Sb}u$  substitution déterminée par la matrice  $u$  nous indiquons l'opération qui, à un complexe  $x$  d'ordre  $n$ , fait correspondre le nombre complexe dont l'élément de rang  $s$  est la fonction linéaire  $\Sigma(\mu_{r,s} v_r \mid v, 1^{***}n)$  des éléments de  $x$ .

\*1  $\text{Sb}u$  est une Subst. \*1. Toute Subst est représentée par une matrice.

\*01  $x \in \text{q}_u \rightarrow \bigcup. (\text{Sb}u).v = \{ \mid \Sigma(\mu_{r,s} v_s \mid s, 1^{***}n) \mid, v, 1^{***}n \}$

\*1  $\text{Sb}u \in \text{Subst } \text{q}_u$

\*2  $\text{Sb}u + \text{Sb}v = \text{Sb}(u+v)$

\*3  $(\text{Sb}v)(\text{Sb}u) = \text{Sb}[\Sigma(\mu_{r,q} \mu_{q,s}^{-1} v_s \mid (v,s), 1^{***}n; 1^{***}n)]$

\*4  $u \in \text{Subst } \text{q}_u \rightarrow \bigcup. u = \text{Sb}[\mid u \text{ unit}(u,s) \mid, (v,s), 1^{***}n; 1^{***}n \}$

Dtrm \* 5.  $n \in \mathbb{N}_1, a, b \in \text{Subst } \text{q}_u, u \in \text{qF}(1^{***}n; 1^{***}n) \rightarrow \bigcup.$

\*0  $\text{Dtrm}a = \text{Dtrm}[\mid a \text{ unit}(u,s) \mid, (v,s), 1^{***}n; 1^{***}n \}$  Df

\*01  $\text{Dtrm}a = 0 \rightarrow \bigcup. a \in (\text{q}_u \text{Fq}_u) \text{rep}$

\*02  $x \in \text{q}_u \rightarrow (0, a, v = 0) \rightarrow \bigcup. \text{Dtrm}a = 0$

\*03  $\text{Dtrm}a = 0 \Rightarrow \exists \text{q}_u \rightarrow (0, x, \exists(a, v = 0))$

$\text{Dtrm}a = 0 \Rightarrow a$  est un diviseur de 0. Teiler der Null, selon Weierstrass.

\*04  $h \in \text{q}_u, x \in \text{q}_u \rightarrow (0, a, v = h.v) \rightarrow \bigcup. \text{Dtrm}(a-h) = 0$

\*1  $\text{Dtrm}(ab) = \text{Dtrm}a \text{Dtrm}b$

\*11  $n \in \mathbb{N}_1 \rightarrow \bigcup. \text{Dtrm}(a^n) = (\text{Dtrm}a)^n$

\*2  $\text{Dtrm}a \neq 0 \rightarrow \bigcup. a^{-1} = \not/a = v \text{Subst } \text{q}_u \wedge \exists \exists(a \exists = 1)$  Df

\*3  $\text{Dtrm } \text{Sb}u = \text{Dtrm}u$

\*4  $(\text{Sb}u)^{-1} =$

$\text{Sb}[\mid (-1)^{***} \text{Dtrm}[\mid u, 1^{***}n \rightarrow (v; 1^{***}n \rightarrow \exists \exists) \mid, (v,s), 1^{***}n; 1^{***}n \} / \text{Dtrm } u$

\*5  $x, y \in \text{q}_u \text{F} 1^{***}n, \text{Dtrm } v \neq 0 \rightarrow \bigcup.$

$y / v = v \text{Subst } \exists \exists[\mid v \in 1^{***}n \rightarrow \bigcup. \exists(v, v) = y, v \}$  Df

[ Ex. : §vet P60 ]

\*6  $n \in \mathbb{N}_1, u \in \text{qF}(1^{***}n; 1^{***}n), \text{Dtrm } u \neq 0, y \in \text{q}_u \rightarrow \bigcup:$

$x \in \text{q}_u, (\text{Sb}u).v = y \Rightarrow x = (\text{Sb}u)^{-1}y$

lim \* 6.0  $a \in (\text{Subst } \text{q}_n) \text{f } \mathbb{N}_0 \rightarrow \bigcup.$

$\lim a = v (\text{Subst } \text{q}_n) \wedge \exists \exists[\mid v \in \text{q}_n \rightarrow \bigcup. \lim(a, v) = h, v \}$  Df

\*1  $u \in \text{qf}(1^{***}n; 1^{***}n; \mathbb{N}_0) \rightarrow \bigcup.$

$\lim[\text{Sb}[u(v,s,t) \mid (v,s), 1^{***}n; 1^{***}n] \}^{-1} u =$

$\text{Sb}[\lim[\mid u(v,s,t) \mid t] \mid (v,s), 1^{***}n; 1^{***}n \}$

e \* 7.  $n \in \mathbb{N}_1, a, b \in \text{Subst } q_n \rightarrow$

$$\cdot 0 \quad e'' = \Sigma[(a''/n!) | n, N_0]$$

Df

$$\cdot 1 \quad e'' \in \text{Subst } q_n$$

$$[ \text{Hp} \cdot \text{P3} \cdot 4 \cdot r \in \mathbb{N}_1 \rightarrow \text{mod}(ar/r!) \leq (\text{mod } a)/r! \quad (1)$$

$$\text{Hp} \cdot \S e \text{ P2} \cdot 1 \rightarrow \Sigma[(\text{mod } a)r/r! | r, N_0] \in \mathbb{Q} \quad (2)$$

$$\text{Hp} \cdot (1) \cdot (2) \rightarrow \Sigma[\text{mod}(ar/r!) | r, N_0] \in \mathbb{Q} \quad (3)$$

$$\text{Hp} \cdot (3) \cdot \S q_n \text{ 25} \cdot 1 \rightarrow \Sigma[(a''/r!) | r, N_0] \in \text{Subst } q_n \quad (4)$$

$$(4) \cdot \text{P} \cdot 0 \rightarrow \text{P} ]$$

$$\cdot 2 \quad ab = ba \rightarrow e^{a \cdot b} = e^a e^b \quad b e^a = e^a b$$

D \* 11.  $(\text{Subst } q_n | q_n) \S q_n \text{ P31}$

\* 12.  $k \in \text{Cls}'q, \delta k = k \cdot u, r, D u, D r \in (\text{Subst } q_n) Fk \cdot a \in q \rightarrow$

$$\cdot 1 \cdot 2 = \S q_n \text{ P32} \cdot 1 \cdot 2 \quad \cdot 3 \quad D(u r) = u D r + (D u) r$$

$$\cdot 4 \quad D \text{trm } u = 0 \rightarrow D u^{-1} = -u^{-1} (D u) u^{-1}$$

\* 13.

$$\cdot 1 \quad a \in \text{Subst } q_n \rightarrow \Sigma\{a'' D^r [D \text{trm}(a-h) | h, q, 0] / r! | r, 0 \dots n\} = 0$$

} CAYLEY LondonT. a.1858; Papers t.2 p.475 {

Dem; Laguerre JP. t.25 a.1867 p.215, Frobenius JfM. t.84 a.1878 p.1.  
Berlin Ber. a.1896 p.601.

L'équation algébrique à laquelle satisfait la  $\text{Subst } a$  est dite " l'équation caractéristique ", " latent équation de Sylvester ".

$$\cdot 2 \quad u \in q F(1 \dots n; 1 \dots n) : r, s \in 0 \dots n \rightarrow r, s, u_{r,s} = u_{s,r} \rightarrow$$

$$\S (q f 1 \dots n) \wedge x \exists h \in q \rightarrow h, D \text{trm}(Sb u - h) = H[(x r - h) | r, 1 \dots n]$$

} LAGRANGE BerlinM. a.1773 p.108, pour  $n=3$ ; CAUCHY

Exerc. a.1829 t.4 p.140 {

Le déterminant (tableau)  $u$  qui satisfait à Hp 2 est dit « symétrique ».

L'équation  $D \text{trm} Sb u - h = 0$  est dite « l'équation séculaire ».

\* 14 1  $a \in \text{Subst } q_n, x \in q \rightarrow D(e^{a,x} | x, q, x) = a e^{a,x}$

$$\cdot 2 \quad a \in \text{Subst } q_n, x \in q, F q, D x = a x, t \in q \rightarrow x t = (x 0) e^{\mathbb{N}(a t)}$$

L'équation  $D x = a x$  représente le système de  $n$  équations différentielles linéaires homogènes à coefficients constants.

La P 2 exprime la fonction (intégrale)  $x$ .

S \* 15 1  $u \in (\text{Subst } q_n F q) \text{cont} \cdot a \in q \rightarrow x \in q, F q, D x =$

$$u x, x 0 = a \Rightarrow x = \Sigma[ \{ S(u r, \Theta z) | z \} | r | r, N_0 ] a$$

Cette formule donne le développement en série toujours convergente de l'intégrale d'un système d'équations différentielles linéaires à coefficients variables. Voir TorinoA. a.1887, MA. a.1888 t.32 p.450, TorinoA. a.1897, Encyclopädie t.2 p.199.

§83  $i = (\text{unité imaginaire}) \quad q' = (\text{nombre imaginaire})$

Sb \* 1.0  $i = \text{Sb}[(0, -1), (1, 0)] \quad \text{Df}$

\*1  $x, y \in \mathbb{C}_1 \Rightarrow \text{Df } i(x, y) = (-y, x) \quad *2 \quad i \in \text{Subst } q_2$

\*3  $i^2 = -1 \quad \} \text{ BOMBELLI a.1579 p.169:}$

« plus di meno [ $\sqrt{-1}$ ] via [...] plus di meno [ $\sqrt{-1}$ ] fa meno [ $= -1$ ] »

\*4  $\text{mod } i = 1 \quad *5 \quad \text{Dtrm } i = 1$

\* 2.0  $q' = q + iq \quad \text{Df}$

$x, y, x', y' \in q, a, b, c \in q' \Rightarrow$  \*1  $x + iy \in q'$

\*2  $x + iy = x' + iy' \Rightarrow x = x', y = y'$

[  $x + iy = x' + iy' \Rightarrow x - x' = iy' - y \Rightarrow x - x'^2 = -y' - y^2 \Rightarrow$   
 $x - x'^2 + y - y'^2 = 0 \Rightarrow x = x', y = y' \quad ]$

\*3  $(x + iy) + (x' + iy') = (x + x' + iy + iy')$

\*31  $a + b \in q', a + b = b + a, a + (b + c) = (a + b) + c = a + b + c$

\*4  $(x + iy)(x' + iy') = (xx' - yy') + i(xy' + x'y)$

\*41  $ab \in q', ab = ba, a(b + c) = ab + ac, a(bc) = (ab)c = abc$

\*42  $ab = 0 \Rightarrow a = 0 \vee b = 0$

[  $x, y, x', y' \in q \Rightarrow (x + iy)(x' + iy') = 0 \Rightarrow x - yy' = 0, xy' + x'y = 0 \Rightarrow$   
 $(xx' - yy'^2 + xy + x'y^2 = 0 \Rightarrow (x^2 + y^2)(x'^2 - y'^2) = 0 \Rightarrow x^2 + y^2 = 0 \vee$   
 $x'^2 + y'^2 = 0 \Rightarrow x = 0, y = 0 \vee x' = 0, y' = 0 \quad ]$

\*43  $(q' \mid n) \S \times \text{P8}$

\*5  $x^2 + y^2 = 0 \Rightarrow (x + iy) = (x - iy)/(x^2 + y^2)$

\*31  $(q' \mid r) \S \text{ P40}$

\*6  $m \in N_1 \Rightarrow a'' \in q' \quad *61 \quad (q' \mid n) \S \uparrow \text{P11-14}$

Note. Nous définissons l'unité imaginaire comme la substitution représentée par la matrice  $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ .

L'unité imaginaire, « plus di meno » de Bombelli, a été indiquée d'abord par  $\sqrt{-1}$ , et ensuite par  $i$  Euler dans un Mémoire présenté à Petrus, a.1777 et publié dans Calc. Integr. a.1794 t.4 p.184.

Les  $q$  sont de la forme  $x + iy$ , où  $x, y \in q$ . Ils s'appellent en général « nombres imaginaires », et se présentent dans les calculs comme des substitutions des  $q_2$ . Gauss a.1831 a changé le nom en « nombres complexes » ; mais il ne faut pas les confondre avec les  $q_2$ , que nous lisons « nombres complexes d'ordre 2 ».

En effet nous multiplions les substitutions, tandis que nous ne multiplions pas les nombres complexes. Un nombre imaginaire est déterminé et détermine un couple de nombres réels, mais il ne coïncide pas avec ce couple.

Cela résulte aussi de l'interprétation géométrique des complexes et des

imaginaires. Les vecteurs se comportent exactement comme des nombres complexes. Voir §vct 11.7. Les produits intérieur et extérieur des vecteurs ne sont pas des vecteurs.

L'unité imaginaire se comporte comme un Rotor, §vct 60.0, cas particulier des quaternions, qui sont des opérations.

Les A., qui considèrent les  $q'$  comme des couples de nombres réels, prennent comme Df de  $=, +, -$  les P2.2.3.4. Alors la Df du  $\times$  se présente comme artificieuse (Encyclopédie, p.151) et ces définitions ne sont pas indépendantes, car des .3 et .4 on déduit la .2, comme résulte de la Dm. qui l'accompagne.

Contre la façon d'introduire les imaginaires pour satisfaire à une question impossible, et qu'on rencontre aussi quelques fois pour les nombres négatifs et les fractionnaires, Gauss a.1799 t.3 p.6 a dit :

« Quodsi quis dicat, triangulum rectilineum aequilaterum rectangulum impossibile esse, nemo erit qui neget. At si tale triangulum impossibile tanquam novum triangulorum genus contemplari, aliasque triangulorum proprietates ad illud applicare voluerit, aequis risum teneat? Hoc esset verbis ludere sen potius abuti..... »

real imag conj \* 3.  $x, y \in q'. a, b \in q' . \supset$

.0 real  $a = i q' \wedge r3(a - x \in i q)$  Df

imag  $a = i q' \wedge y3(a - i y \in q)$  Df

conj  $a = \text{real } a - i \text{ imag } a$  Df

Le signe « real » se rencontre dans Weierstrass sous la forme R ; dans les quaternions de Hamilton il a la forme S = (scalar).

Ex. : 4.5 6.5 16.1 §sin 1.0.

“ imag ” = “ le coefficient de la partie imaginaire ”.

“ conj ” = “ conjugué ” (Cauchy a.1821).

.1 real( $x+iy$ ) =  $x$  . imag( $x+iy$ ) =  $y$  . conj( $x+iy$ ) =  $x-iy$

.2  $a = \text{real } a + i \text{ imag } a$   
 $\text{real } a = (a + \text{conj } a)/2$  .  $\text{imag } a = (a - \text{conj } a)/(2i)$

.3 real( $a+b$ ) =  $\text{real } a + \text{real } b$  . imag( $a+b$ ) =  $\text{imag } a + \text{imag } b$   
 $\text{conj}(a+b) = \text{conj } a + \text{conj } b$

.4 real  $ia = -\text{imag } a$  . imag  $ia = \text{real } a$  . conj  $ia = -i \text{ conj } a$

.5 conj  $/a = / \text{conj } a$  .9  $m \in N_1 . \supset$  . conj  $a^m = (\text{conj } a)^m$

$\downarrow \sqrt[m]{*}$  \* 4.  $a \in q' . m, n \in N_1 . \supset$  .0  $\sqrt[m]{*}a = q' \wedge r3(x^m = a)$  Df  
 $\sqrt[m]{*}a$ , qu'il faut décomposer en  $(\sqrt[m]{*}a)$ , indique l'ensemble des racines  $m$ -ièmes de  $a$ ;  $\sqrt[m]{*}a$  indique la « racine principale », celle qui a la plus grande partie réelle.

.1  $\sqrt[m]{*}0 = i0$  .2  $a = 0 . \supset$  . Num  $\sqrt[m]{*}a = m$

.3  $x \in \sqrt[m]{*}a . \supset$  .  $\sqrt[m]{*}a = x \times \sqrt[m]{*}1$

$$*4 \quad x, y \varepsilon \sqrt[n]{*1} \Rightarrow x \times y, x/y, x', x'^{-n}, \text{conj. } x \varepsilon \sqrt[n]{*1}$$

Continuation §7 P3.2

$$*5 \quad a \varepsilon -Q \Rightarrow \sqrt[n]{a} = r(\sqrt[n]{*a}) \wedge x_2(\text{real } x = \max \text{real } \sqrt[n]{*a}) \quad \text{D1}$$

$$*6 \quad x \varepsilon q, y \varepsilon Q \Rightarrow$$

$$\sqrt[n]{(x+iy) = \sqrt[n]{(\sqrt[n]{x^2+y^2}+x)/2} + i \sqrt[n]{(\sqrt[n]{x^2+y^2}-x)/2}$$

$$\sqrt[n]{(x-iy) = \sqrt[n]{(\sqrt[n]{x^2+y^2}+x)/2} - i \sqrt[n]{(\sqrt[n]{x^2+y^2}-x)/2}$$

$$\Sigma \quad H \quad *5. (q' \vdash r) \S \Sigma \text{ P1.6, } \S 7 \text{ P1.5, } \S 1 \text{ P2.9-31 7, 8, 9}$$

$$*1 \quad n \varepsilon N_1, a \varepsilon q' f(1 \dots n) \Rightarrow \exists q' \wedge x_3 | x^n + \Sigma(a, x^{n-1} \dots x, 1 \dots n) = 0 \quad \{$$

$$*2 \quad \text{Hp } 1 \Rightarrow \exists (q' f(1 \dots n) \wedge x_3) x \varepsilon q' \Rightarrow x, x^n + \Sigma(a, x^{n-1} \dots x, 1 \dots n) = H(x-z) \quad x, 1 \dots n \quad \} \quad \text{GIRARD a.1629 fol. E3:}$$

« Toutes les equations d'algebre recoivent autant de solutions, que la denomination de la plus haute quantité le demonstre ».

Sur la bibliographie de cette P voir Loria RdM. a.1891 t.1 p.185, t.2 p.37.

$$\text{mod} \quad *6. \quad \text{Hp } \text{P3} \Rightarrow *1 \quad \text{mod}(x+iy) = \sqrt[n]{(x^2+y^2)}$$

$$*11 \quad \text{mod } ab = \text{mod } a \text{ mod } b$$

$$\{ x, y, x', y' \varepsilon q \Rightarrow \text{mod}[x+iy, x'+iy] = \text{mod}[x x' - y y', -i x y' - x' y] = \sqrt[n]{(x x' - y y')^2 + (x y' + x' y)^2} = \sqrt[n]{(x^2+y^2)(x'^2+y'^2)} = \text{mod } x+iy \wedge \text{mod } x'+iy \quad \}$$

$$*2 \quad n \varepsilon N_1 \Rightarrow \text{mod}(a^n) = (\text{mod } a)^n$$

$$*3 \quad \text{mod } a = \sqrt[n]{[(\text{real } a)^2 + (\text{imag } a)^2]} = \sqrt[n]{(a \times \text{conj } a)} \quad \text{Dfp}$$

$$\text{mod } a = 1 \Rightarrow \text{conj } a = 1/a$$

$$\text{Lm lim} \quad *10.$$

$$*1 \quad n \varepsilon q' f N_0, a \varepsilon q', \Sigma(a_n a^n | n, N_0) \varepsilon q', x \varepsilon q', \text{mod } x < \text{mod } a \Rightarrow \Sigma(a_n x^n | n, N_0) \varepsilon q' \quad \} \quad \text{ABEL t.1 p.223 \{}$$

$$*2 \quad n \varepsilon q' f N_0, a \varepsilon q', x \varepsilon \text{Lm}(\text{mod } a_n a^n | n, x \varepsilon q', \text{mod } x < \text{mod } a) \Rightarrow \Sigma(a_n x^n | n, N_0) \varepsilon q'$$

On appelle : rayon de convergence de la série  $\Sigma(a_n a^n | n, N_0)$

$$= \text{rmod } q \wedge a_2[\Sigma(a_n a^n | n, N_0) \varepsilon q]$$

cercle de convergence =  $q \wedge x_2 \text{mod } x < \text{rayon de convergence}$ .

$$*3 \quad n \varepsilon q' \wedge (t-1) \varepsilon N_0, \Sigma \text{mod } a \varepsilon Q \Rightarrow H[(1+a_n)^{-1} r, N_0] \varepsilon q' \wedge (t) \quad \} \quad \text{WEIERSTRASS a.1856 t.1 p.176 \{}$$

$$*4 \quad n \varepsilon q' f N_0, a \varepsilon q', \Sigma(a_n a^n | n, N_0) \varepsilon q' \Rightarrow$$

$$\text{lim}[\Sigma(a_n x^n | n, N_0)^{-1} r, \theta a, a] = \Sigma(a_n a^n | n, N_0) \quad \} \quad \text{ABEL t.1 p.223 \{}$$

$$*5 \quad a, b \varepsilon q, \text{real } a < \text{real } b, b \varepsilon -N_0 \Rightarrow H[(a+r)(b+r)^{-1} r, N_0] = 0$$

$$\text{D} \quad *11-13 \quad (q' \vdash q) \S \text{D P1-3}$$

$$\text{e} \quad *14. \quad x, y \varepsilon q, a, b \varepsilon q', m \varepsilon n \Rightarrow$$

$$*1 \quad e^{-n/b} = e^n e^{-b} \quad *2 \quad e^{-a} = 1/e^a \quad (e^0 = e^{-0})$$

$$*3 \quad \text{mod } e^n = e^n(\text{real } a) \quad *4 \quad \text{mod } e^{ix} = 1, \text{conj } e^{ix} = e^{-ix}$$

$$\ast \quad 15.1 \quad x \varepsilon q' \quad \supset \quad D(e^x | x, q', x) = e^x$$

$$\quad 2 \quad x \varepsilon q \quad \supset \quad D(e^{ix} | x, q, x) = ie^{ix}$$

$$\quad \quad \quad n \varepsilon N_1 \quad \supset \quad D^n(e^{ix} | x, q, x) = i^n e^{ix}$$

$$\ast \quad 16.1 \quad a \varepsilon q' \quad , \operatorname{real} a > 0 \quad \supset \quad S(e^{-ax} | x, Q) = /a$$

$$\operatorname{Dtrm} \quad 20.1 \quad n \varepsilon N_1 \quad , a \varepsilon qF \quad 0 \cdots n \quad \supset \quad$$

$$\operatorname{Dtrm} \{a[\operatorname{rest}(r+s, n)] \mid (r;s), (0 \cdots n; 0 \cdots n)\} =$$

$$H \{ \Sigma(a, r^r | r, 0 \cdots n) | x, {}^{n+1} \sqrt[1]{1} \}$$

$$\} \quad \text{J. W. GLAISHER a.1879 QJ. t.16 p.31}$$

Le déterminant (tableau) qui figure dans cette P est dit « circulant ».

$$\ast \quad 21.0 \quad k = \operatorname{Sh}[(1, 0), (0, -1)] \quad \operatorname{Df}$$

$$x, y \varepsilon q \quad \supset \quad k(x, y) = (x, -y) \quad k \varepsilon \operatorname{Subst} q_2$$

$$k^2 = 1 \quad \operatorname{mod} k = 1 \quad \operatorname{Dtrm} k = -1$$

$$1 \quad i k = -k i \quad (i k)^2 = 1$$

$$w, x, y, z, w', x', y', z', p, q, r, s \varepsilon q \quad , a, b \varepsilon \operatorname{Subst} q_2 \quad \supset :$$

$$2 \quad w + xi + yk + zik = \operatorname{Sh}[(w-y, x+z), (z-x, w-y)]$$

$$\operatorname{Sh}[(p, q), (r, s)] = [(p+s) + (q-r)i + (p-r)k + (q-r)ik] \quad 2$$

$$\operatorname{Subst} q_2 = q + qi + qk + qik$$

$$w + xi + yk + zik = w' + x'i + y'k + z'ik \quad . = . \quad w = w' \quad , x = x' \quad ,$$

$$y = y' \quad , z = z'$$

$$3 \quad \operatorname{real} a = r q \wedge w z (a - w \varepsilon qi + qk + qik) \quad \operatorname{Df}$$

$$\operatorname{real} a = (a - iai + k ak + i k a i k) \quad 4$$

$$a = \operatorname{real} a - i \operatorname{real}(ia) + k \operatorname{real}(ka) + i k \operatorname{real}(ika)$$

$$\operatorname{real}(w + xi + yk + zik) = w \quad \operatorname{real}(a + b) = \operatorname{real} a + \operatorname{real} b$$

$$\operatorname{real}(wa) = w \operatorname{real} a \quad \operatorname{real}(ab) = \operatorname{real}(ba)$$

$$4 \quad \operatorname{Dtrm}(w + xi + yk + zik) = w^2 + x^2 - y^2 - z^2$$

$$a^2 - 2a \operatorname{real} a + \operatorname{Dtrm} a = 0$$

$$\operatorname{Dtrm}(c \wedge a) = c \wedge (2 \operatorname{real} a)$$

$$5 \quad e k r = (e^x + e^{-x}) \quad 2 + k(e^x - e^{-x}) \quad 2$$

La substitution k ne figure plus dans la suite. Ces formules sont exposées, sous forme géométrique dans " *Trasformazioni lineari dei Vettori d'un piano*, TorinoA. a.1895 ".

Toute Subst des  $q_2$  est une combinaison linéaire des 4 Subst : 1, i, k, ik.

Le Subst de la forme  $q + qi$  sont les nombres imaginaires,  $q'$ ; elles s'appellent aussi " similitudes directes ".

$$(q + qi)k = \text{ " similitude inverse " }$$

$$qi + qk + qik = \text{ " involution " }$$

$$q + qk + qik = \text{ " dilatation " }$$

$$c \wedge (iq) = \text{ " rotation " } \quad k c \wedge (iq) = \text{ " symétrie " }.$$



§84  $\pi$

e i \* 1.0  $\pi = \min\{Q(x, x(e^i - 1))\}$  Df

Le nombre  $\pi$  se présenta d'abord comme rapport de la circonférence au diamètre. Ce signe, introduit par JONES, adopté par Euler, est devenu ensuite d'usage commun. Il est la lettre initiale du mot *περίμετρος*.

\*1  $\pi/4 \varepsilon 8/9)^2 - 20X^{-2}$  } AHMÈS a.—2000 :

N.41. 9 diamètre du cercle  $\cdot 9 \cdot 9 = 1 \cdot 9 = 1 = 8 \cdot 8 = 64$  aire du cercle  $\cdot$

N.42. 10 diamètre  $\cdot 10 \cdot 9 = 1 \cdot 9 \cdot 10 = 1 \cdot 9 = 8 \cdot 2 \cdot 3 = 64/18 \cdot$

$8 + 2 \cdot 3 = 6 \cdot 1/18 = 79 \cdot 1/108 = 321$  aire  $\cdot$

\*2  $3 + 1/7 > \pi > 3 + 10/71$

} ARCHIMEDES, *Dimensio circuli* P3:

Παντὸς ῥέζοντος ἢ περιμέτρος τῆς διαμέτρου τοιγυσιώων ἐστί, καὶ ἔτι ἐπερέχει ἐλάσσονι μὲν ἢ ἐβδόμερῳ μέρει τῆς διαμέτρου, μείζονι δὲ ἢ δέξα ἑβδόμουιστομέτροις. {

\*3  $\pi \varepsilon 3 + 8 \times 60^{-1} + 30 \times 60^{-2} - 0.60^{-2}$  } PROLEMAEUS t.1 p.512:

...τοῦ ῥέζοντος τῶν περιμέτρων πρὸς τὰς διαμέτρους ἕντος, ὃ ἔχει τὰ  $\frac{1}{7} \cdot \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{7}$  πρὸς τὸ ἔν. {

\*4  $\pi \varepsilon 62832/20000 - 0X^{-4}$  } ARYABHATA p.399:

«Ajoutez 4 à 100, multipliez par 8, ajoutez encore 62000, voilà pour un diamètre de deux myriades ayutās la valeur approximative de la circonférence du cercle  $\cdot$

\*5  $377/120 > \pi > 333/106$

} A. ANTHONISZ. voir BM. a.1888 p.36; a.1889 p.84 {

$\pi \varepsilon 355/113 - 0X^{-5}$  } A. METHUS a.1625 p.88 {

\*6  $\pi \varepsilon Q \cdot R$  } LAMBERT *BerlinM.* a.1768 p.265-322 {

\*7  $\pi^2 \cdot \varepsilon R$  } LEGENDRE *Géom. Triv.* a.1794 note 4 {

\*81  $\pi \varepsilon \sqrt[4]{(1 + \sqrt[4]{6}) + \sqrt[4]{9 - 3\sqrt[4]{6}}} - 0X^{-3}$  } MASCHERONI a.1798 p.248 {

\*82  $\pi \varepsilon 9.5 + 3 \sqrt[4]{5} - 0X^{-4}$  } VIETA a.1593 Opera p.393 {

\*83  $\pi \varepsilon \sqrt[4]{40.3 - 2\sqrt[4]{3}} + 70X^{-5}$  } KOCHANSKI AErud. a.1685 p.398 {

\*84  $\pi \varepsilon (13\sqrt[4]{146} \cdot 59 + 0X^{-6}$  } SPECHT JfM. a.1828 t.3 p.83 {

\*85  $\pi \varepsilon (501 + 80\sqrt[4]{10}/240) - 0X^{-7}$

} GERGOXNE Ann. a.1817 t.8 p.252 {

*Note.* — Les P<sup>83-81</sup> donnent des constructions géométriques assez simples pour  $\pi$  en observant que :

$$\sqrt[4]{40/3 - 2\sqrt[4]{3}} = \sqrt[4]{1 + 3 - \sqrt[4]{3^2}} \quad ; \quad 13\sqrt[4]{146} \cdot 59 = 13 \cdot 10 \sqrt[4]{1 + 11.5^2} \cdot$$

$$9 \quad n \in \mathbb{N}_1, x \in \text{rf } 1 \cdots n \quad \bigcup \quad \pi^n + \sum (r, \pi^{n-r} | r, 1 \cdots n) = 0$$

{ LINDEMANN a.1882 MA. t.20 p.213;

cfr. GORDAN a.1893 MA. t.43 p.222 {

$\pi = 3$

14159 26535 89793 23846 26433 83279 50288 41971 69399 37510  
 58209 74944 59239 78164 06286 20899 86280 34825 34211 70679  
 82148 08651 32823 06647 09384 46095 50582 23172 53594 08128  
 48111 74502 84102 70193 85211 05559 64462 29489 54930 38196  
 44288 10975 66593 34461 28475 64823 37867 83165 27120 19091  
 45648 56692 34693 48610 45432 66482 13393 60726 02491 41273  
 72458 70066 06315 58817 48815 20920 96282 92540 91715 36436  
 78925 90360 01133 05305 48 20 46652 13841 46951 94151 16094  
 33057 27036 57595 91953 09218 61173 81932 61179 31051 18548  
 07446 23799 62749 56735 18857 52724 89122 79381 83011 94912  
 98336 73362 44065 66430 86021 39591 60924 48077 23694 36285  
 53096 62027 55693 97986 95022 24749 96206 07497 03041 23668  
 86199 51100 89202 38377 02131 41694 11902 98858 25446 81639  
 79990 46597 09081 70029 63123 77381 34208 41307 91451 18398  
 05709 85...

Note. Le nombre $\pi$ a été déterminé par			
Vieta <i>Canon mathematicus</i> , Lutetiae, a.1579 p.15	avec	9	décimaux
Adrianus Romanus <i>Ideæ Math.</i> , Anvers, a.1613	»	15	»
Ludolphus a Ceulen ( <i>de Cologne</i> ) a.1615 p.144	»	32	»
Grienberger, <i>Elementa Trigonometrica</i> , Romæ a.1630	»	39	»
Sharp a.1699 (publié par H. Sherwin, <i>Mathematical tables</i> a.1705 p.59)	»	71	»
Machin, (publié par Jones, <i>Synopsis Palmariorum Matheseos</i> a.1706 p.243, qui le désigna par la lettre $\pi$ )			
Lagny, <i>Hist. de l'Acad. des Sc. de Paris</i> , a.1719 p.144	»	112	»
Vega, <i>Thesaurus Logarithmorum</i> , a.1794 p.633	»	136	»
Thibaut, <i>Grundriss der reinen Math.</i> , 4. éd. a.1822 p.312	»	156	»
Dahse a. 1840; JfM. a.1844 t.27, p.198	»	200	»
Clausen a.1847 (publié par Schulmacher, <i>Astronomische Nachrichten</i> t.25 col.207)	»	248	»
Richter, <i>Archives Math. de Grunert</i> , a.1853, t.21, p.119	»	330	»
Rutherford, LondonP. a.1853	»	440	»
Shanks,	»	530	»
»	»	707	»
a.1874, t. 23, p.45			



$$\begin{aligned} \cdot 2 \quad \pi &= 2(2/1) (2/3) (4/3) (4/5) (6/5) (6/7) \dots \\ &= 4H[(1-n^{-2}) | n, 2N_1+1] = 2/H[(1-n^{-2}) | n, 2N_1] \\ &\quad \{ \text{WALLIS a.1655 t.1 p.469:} \end{aligned}$$

« Dicimus, fractionem illam  $\frac{3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 7 \cdot \&c.}{2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 8 \cdot \&c.}$  seu  $\frac{9 \cdot 25 \cdot 49 \cdot 81 \cdot \&c.}{8 \cdot 24 \cdot 48 \cdot 80 \cdot \&c.}$  in infinitum continuatam, esse ipsissimum quaesitum numerum  $\square$  praeise ad quem ita se habet 1, ut Circulus ad Quadratum Diametri  $\}$

$$\begin{aligned} \cdot 3 \quad \pi/4 &= \sum (-1)^n / (2n+1) | n, N_0 \{ \\ &\quad \{ \text{LEIBNIZ a.1682 MathS. t.5 p.120:} \end{aligned}$$

$\cdot$  Quadrato Diametri existente 1.

Circuli aream fore  $\frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \frac{1}{13} - \frac{1}{15} + \frac{1}{17} - \frac{1}{19}$  etc.,

neque quadratum diametri integrum demta (ne nimius fiat valor) ejus tertia parte, addita rursus (quia nimium demsimus) quinta, demtaque iterum (quia nimium re-adjecimus) septima, et ita porro.  $\cdot$

$$\begin{aligned} \cdot 4 \quad \pi^2/6 &= \sum N_1^{-2} \\ &\quad \{ \text{EULER a.1735 PetrC. t.7 ; voir BM. a.1890 p.24 } \\ &\quad \{ \text{Joh. BERNOULLI t.4 p.21:} \quad \frac{\pi^2}{6} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \&c. \} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cdot 41 \quad \pi^4/90 &= \sum N_1^{-4} \quad \cdot 32 \quad m \varepsilon N_1 \cdot \supset \cdot \sum N_1^{-2m} \varepsilon R \pi^{2m} \\ &\quad \{ \text{Joh. BERNOULLI t.4 p.24 } \} \quad \text{Continuation: } \S B \cdot 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cdot 42 \quad \pi^3/32 &= 1 - 3^{-3} + 5^{-3} - \dots \quad 5\pi^5/1536 = 1 - 3^{-5} + 5^{-5} - \dots \\ &\quad \{ \text{EULER a.1748 p.137 } \} \end{aligned}$$

$$\cdot 5 \quad \lim(n! n^{-n} e^n / \sqrt{n}) | n = \sqrt{(2\pi)} \quad \{ \text{STIRLING a.1730 p.137 } \}$$

$$\begin{aligned} \cdot 6 \quad n \varepsilon N_1 \cdot \supset \cdot C(2n, n) &< 2^{2n} \sqrt{n\pi} \\ &> 2^{2n} \sqrt{[(n+2)\pi]} \quad \{ \text{STIRLING id. p.119} \} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cdot 7 \quad x \varepsilon q' \cdot \supset \cdot (e^x - e^{-x})/2 &= x(1+x^2\pi^{-2})(1+x^2 2^{-2}\pi^{-2}) \dots \\ &= xH[(1+x^2\pi^{-2}n^{-2}) | n, N_1] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cdot 8 \quad x \varepsilon q' \cdot \supset \cdot (e^x + e^{-x})/2 &= (1+4x^2\pi^{-2})(1+4x^2 3^{-2}\pi^{-2}) \dots \\ &= H[(1+4x^2\pi^{-2}n^{-2}) | n, 2N_0+1] \\ &\quad \{ \text{EULER a.1748 p.119,120 } \} \end{aligned}$$

Les fonctions considérées dans P.7 et .8 sont dites fonctions « hyperboliques » et indiquées par Shx, Chx (Riccatti a.1757).

$$\cdot 9 \quad x \varepsilon q = n\pi \cdot u \varepsilon (QfN_0) \text{decr} \cdot \lim u = 0 \cdot \supset \cdot \sum (u, e^{ix} | n, N_0) \varepsilon q'$$

\* 4.  $n \in N_1, \sigma_i = \Sigma(N_1 \cap n N_1), \bigcup.$

1  $\lim_i (\sigma_1 + \sigma_2 + \dots + \sigma_i) / n^2 \{ \mu = \pi^2 / 12$

2  $\lim_i (\sigma_1 / 1 + \sigma_2 / 2 + \dots + \sigma_i / i) / n \{ \mu = \pi^2 / 6$

3  $\lim_i (\sigma_1 / 1 + \sigma_2 / 4 + \dots + \sigma_i / i^2) \log n \{ \mu = \pi^2 / 6$

4  $\lim_i (\phi_1 + \phi_2 + \dots + \phi_i) / n^2 \{ \mu = 3 \pi^2$

5  $\lim_i (\phi_1 / 1 + \phi_2 / 2 + \dots + \phi_i / i) / n \{ \mu = 6 \pi^2$

6  $\lim_i (\phi_1 / 1 + \phi_2 / 4 + \dots + \phi_i / i^2) \log n \{ \mu = \pi^2 / 6$

{ 1-6 CESÀRO a.1893 NapoliA. s.2 t.6 N°11 p.15 }

log \* 5.0  $x \in \mathbb{Q}' \setminus \{0\}, \bigcup, \log^* x = \mathbb{Q}' \cap \mathcal{Y}_3(e^{\mathbb{Q}'} = x)$

Df

01  $\log x = \iota(\log^* x) \cap \mathcal{Y}_3 - \pi < \text{imag } y \leq \pi$  Df

$\log^* x$  indique la classe des solutions de l'équation  $e^y = x$ .

$\log x = \pi$  la valeur principale du logarithme  $\iota$ , indique la solution dont le coefficient de l'unité imaginaire est compris entre  $-\pi$  et  $+\pi$ .

02  $\log^* x = \log x + 2n\pi i$

1  $\log i = i\pi/2, \log(-1) = i\pi$

{ EULER a.1728 (Voir BM. a.1899 p.46) :

• Sit radius circuli  $a \dots$  habebis quadrans circuli  $= \frac{aa}{4\sqrt{-1}} \log(-1) \dots$

imag  $\log x$  est dit " argument, amplitude, azinauth, anomalie,..." de  $x$ .

2  $x \in \mathbb{Q}', \text{mod } x \leq 1, x \neq -1, \bigcup, \log(1+x) = x - x^2/2 + x^3/3 - \dots$

3  $-\log(\pi/4) = \Sigma(2N_1+1)^{-2} + \Sigma(2N_1+1)^{-4}/2 + \Sigma(2N_1+1)^{-6}/3 + \dots$   
{ EULER a.1748 p.150 }

4  $\log(\pi^2/6) = \Sigma N p^{-2} + \Sigma N p^{-4}/2 + \Sigma N p^{-6}/3 + \dots$

{ EULER a.1748 p.235 }

S \* 10.

1  $S[/(1+x^2)] [x, \mathbb{Q}] = 2S[-----, \mathbb{Q}] = 4S[-----, \Theta] = \pi$

2  $S[/(1+x+x^2)] [x, \mathbb{Q}] = S[/(1-x+x^2)] [x, \Theta] =$   
 $2S[-----, \Theta] = 2\pi \times 3/2$

21  $a \in \mathbb{Q}, \bigcup, S[/(a^2+x^2)] [x, \mathbb{Q}] = \pi/a$

22  $p, q \in \mathbb{Q}, q-p^2/4 > 0, \bigcup, S[/(x^2+px+q)] [x, \mathbb{Q}] = \pi/\sqrt{(q-p^2/4)}$

23  $a \in \mathbb{Q}, b, c \in \mathbb{Q}, ac-b^2 > 0, \bigcup,$

$S[/(ax^2+2bx+c)] [x, \mathbb{Q}] = \pi/\sqrt{(ac-b^2)}$

- 3  $S[/(1+x^3) |x, Q] = S[x/(1+x^3) |x, Q] = 2\pi/(3\sqrt{3})$
- 4  $S[/(1+x^4) |x, q] = S[x^2/(1+x^4) |x, q] = \pi\sqrt{2}/2$
- 41  $a, b \in \mathbb{Q} \supset S[/(a^2+x^2)(b^2+x^2) |x, q] = \pi/[ab(a+b)]$   
 $| [/(a^2+x^2)(b^2+x^2)] = [/(a^2+x^2) - [/(b^2+x^2)]/(b^2-a^2) ]$
- 42  $a, b \in \mathbb{Q} \supset S[x^2/[a^2+x^2)(b^2+x^2)] |x, q] = \pi/(a+b)$   
 $[ x^2[(a^2+x^2)(b^2+x^2)] = [b^2/[b^2+x^2] - a^2/[a^2+x^2)]/[b^2-a^2] ]$
- 43  $a, b, c \in \mathbb{Q} \supset S[/(a+bx^2+cx^4) |x, q] = S[x^2/(ax^4+bx^2+c) |x, q]$   
 $= \pi/\sqrt{[ab+2a\sqrt{ac}]}$  { PLANA TurinM. a.1820 }
- 5  $S[/(1+x^6) |x, Q] = 2S[x^2/(1+x^6) |x, Q] = S[x^4/(1+x^6) |x, Q]$   
 $= \pi/3$   
 { ·2·5 EULER *Calc. Int.* a.1768 t.1 §353 t.4 s.4 §105 }

e \* 11·4  $S(e^{-x^2} |x, q) = S[\sqrt{-\log x} |x, \Theta] = \sqrt{\pi}$   
 { EULER PetrA. t.16 p.111 }

·2  $a \in \mathbb{Q} \supset S(e^{-ax^2} |x, q) = \sqrt{\pi/a}$

·3  $m \in \mathbb{N} \neq 0 \supset S[e^{m|x} |x, 0 \leftarrow 2\pi] = 0$

·4  $S[\log(1+x)/(1+x^2) |x, \Theta] = (\pi/8) \log 2$   
 { BERTRAND JdM. t.8 a.1843 p.112 }

\* 12·4  $a, b \in \mathbb{Q} \neq 0, \Sigma(\text{mod } a, N_0), \Sigma(\text{mod } b, N_0) \in \mathbb{Q} \supset$   
 $\Sigma(a \times b, N_0) = S[\Sigma(a_s e^{isx} |r, N_0) \times \Sigma(b_s e^{-isx} |s, N_0) |x, 2\Theta\pi] / (2\pi)$   
 { PARSEVAL a.1805 ParisSE. t.1 p.639; IdM. a.1894 p.196 }  
 $[ \text{Hp} \supset S[\Sigma a_r e^{irx} |r, N_0) \times \Sigma b_s e^{-isx} |s, N_0) |x, 2\Theta\pi]$   
 $= S[\Sigma[a_r b_s e^{(r-s)x} | (r;s), (N_0;N_0)] |x, 2\Theta\pi]$   
 $= \Sigma[a_r b_s S[e^{(r-s)x} | (r;s), (N_0;N_0)] = \Sigma(a_r b_r 2\pi |r, N_0) ]$

$$\S 85 \quad \sin \cos \operatorname{tng} \quad \sin^{-1} \quad \cos^{-1} \quad \operatorname{tng}^{-1}$$

⌈ q e i \* 1. xeq .⌋.

$$\cdot 0 \quad \cos x := c x = \operatorname{real} e^{ix} \quad , \quad \sin x := s x = \operatorname{imag} e^{ix} \quad \text{Df}$$

$$sx + y = (sx) + y \quad , \quad sxy = (sx)y \quad , \quad s x^2 = (sx)^2 \quad \text{Df}$$

$$cx = (e^{ix} + e^{-ix})/2 \quad , \quad sx = (e^{ix} - e^{-ix})/(2i) \quad \text{Dfp}$$

$$e^{ix} = cx + i sx \quad , \quad e^{-ix} = cx - i sx$$

⌋ EULER a.1748 p.104 ⌋

$$\cdot 1 \quad s0 = 0 \quad , \quad c0 = 1 \quad , \quad s-x = -sx \quad , \quad c-x = cx$$

$$\cdot 2 \quad \pi = \min Q x s (sx = 0) \quad \text{Dfp}$$

$$s(\pi - x) = sx \quad , \quad s(2\pi + x) = sx$$

$$c(\pi + x) = -cx \quad , \quad c(2\pi + x) = cx$$

$$cx = s(\pi/2 - x) \quad , \quad sx = c(\pi/2 - x) \quad \text{Dfp}$$

$$sx = 0 \quad . = . x \varepsilon n\pi \quad : \quad \cos x = 0 \quad . = . x \varepsilon \pi/2 + n\pi$$

$$c(\pi/2) = 0 \quad , \quad s(\pi/2) = 1$$

$$c(\pi/4) = s(\pi/4) = (\sqrt{2})/2 \quad , \quad c(\pi/3) = \sqrt{3}/2 \quad \} \quad \text{Voir } \S \pi/2 \cdot 1 \quad \}$$

$$\cdot 3 \quad x \varepsilon (-\pi/2) \neg (\pi/2) \quad . \bigcup . \quad \log(cx + i sx) = ix$$

⌋ COTES a.1714 LondonT. t.29 p.32 :

... si quadrantis circuli quilibet arcus  $[x]$ , radio CE [1] descriptus sinum habeat CX  $[\sin x]$ , sinumque complementi ad quadrantem XE  $[\cos x]$ : sumendo radio CE pro Módulo, arcus erit rationis inter EX+XC  $\sqrt{-1}$  et CE  $[\cos x + i \sin x]$  mensura ducta in  $\sqrt{-1}$ . . .

$$\cdot 4 \quad cx^2 + sx^2 = 1$$

$$x \varepsilon \theta\pi/2 \quad . \bigcup . \quad cx = \sqrt{1 - sx^2} \quad , \quad sx = \sqrt{1 - cx^2}$$

$$sx = [(-1) \wedge E(x, \pi)] \sqrt{1 - cx^2}$$

$$cx = [(-1) \wedge E(x, \pi + 2)] \sqrt{1 - sx^2}$$

$$\cdot 5 \quad -1 \leq sx \leq 1 \quad , \quad -1 \leq cx \leq 1$$

$$x \varepsilon Q \quad . \bigcup . \quad sx < x \quad , \quad cx > 1 - x^2/2 \quad , \quad sx > x - x^3/6$$

$$\cdot 6 \quad x, y \varepsilon \theta\pi/2 \quad . x > y \quad . \bigcup . \quad sx/x < sy/y$$

⌋ C. PTOLÉMAËUS t.1 p.43 :

λέγων γάρ, ὅτι, ἐὰν ἐν κόλῳ διαχθῶσιν ἄνισοι δύο εὐθεῖαι, ἡ μεῖζων πρὸς τὴν ἐλάσσονα ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ἐπὶ τῆς μεῖζονος εὐθείας περιφέρεια πρὸς τὴν ἐπὶ τῆς ἐλάσσονος. ⌋

$$\cdot 7 \quad n \in \mathbb{N}_1 \cdot \supset.$$

$$sx = \sum [(-1)^r x^{2r+1} / (2r+1)! \mid r, 0 \dots n] \quad \varepsilon \quad (-1)^{n+1} \theta x^{2n+3} / (2n+3)$$

$$cx = \sum [(-1)^r x^{2r} / (2r)! \mid r, 0 \dots n] \quad \varepsilon \quad (-1)^{n+1} \theta x^{2n+2} / (2n+2)!$$

$$\cdot 8 \quad \mathbb{N}_1 \cap n\mathbb{Z} [c(2\pi/n) \varepsilon r] = \iota 1 \vee \iota 2 \vee \iota 3 \vee \iota 4 \vee \iota 6 \quad \{ \text{HESSEL a.1831} \}$$

$$\ast \quad 2 \cdot 0 \quad x \varepsilon q \cdot cx = 0 \cdot \supset. \quad \text{tg} x = tx = sx/cx \quad \text{Df}$$

$$\cdot 01 \quad x \varepsilon q \cdot (2n+1)\pi/2 \cdot \supset. \quad tx = (e^{ix} - 1) [i(e^{2ix} + 1)] \quad \text{Dfp}$$

$$\cdot 04 \quad x \varepsilon q \cdot (2n+1)\pi/2 \cdot \supset. \quad 1 + (tx)^2 = / (cx)^2$$

$$\cdot 05 \quad x \varepsilon \theta\pi/2 \cdot \supset. \quad sx = tx \vee \sqrt{1 + tx^2} \quad \cdot \quad cx = \vee \sqrt{1 + tx^2}$$

$$\cdot 06 \quad x \varepsilon q \cdot (2n+1)\pi/2 \cdot \supset. \quad sr = [(-1)^n E(x/\pi + 2)] tx \vee \sqrt{1 + tx^2}$$

$$cr = [(-1)^n E(x/\pi)] \vee \sqrt{1 + tx^2}$$

$$\cdot 1 \quad tx = 0 \cdot \Rightarrow \cdot x \varepsilon n\pi \quad \cdot \quad t - x = -tx \quad \cdot \quad t(\pi + x) = tx$$

$$t0 = 0 \quad \cdot \quad t(\pi/4) = 1$$

$$\cdot 2 \quad x \varepsilon \mathbb{R} \cdot \supset. \quad tx \in \mathbb{R} \quad \quad \quad \{ \text{LAMBERT a.1761 p.265} \}$$

$$\cdot 21 \quad n \in \mathbb{N}_1 \cdot t(2\pi/n) \varepsilon r \cdot \supset. \quad n \varepsilon \iota 1 \vee \iota 2 \vee \iota 8$$

$$\quad \{ \text{WENDT, Monh. a.1899 p.97} \}$$

$$\cdot 3 \quad x \varepsilon \theta\pi/2 \cdot \supset. \quad tx > x$$

*Note.*

La fonction « sinus » abrégée en « sin » se présenta d'abord dans les applications astronomiques de la géométrie. Voir §vct P4. Ptolémée a calculé les cordes des arcs de 0° à 180°.

Albategnius (a.880), astronome arabe, a introduit le sinus; il dit en effet: « Ptolémée ne se servait des cordes entières que pour la facilité des démonstrations, mais nous avons pris ces moitiés des cordes des arcs doubles dans toute l'étendue du demi-cercle. »

Le mot arabe est *gib* ou *dyib*, qui signifie un pli; c'est la corde pliée en deux. Le pli d'une robe, en latin, se dit *sinus*. P. ex. selon Virgile (*Aeneides* l.1) Venus se présenta à Énée: *Nuda genu, nodoque sinus collecta fluentes* ».

Les traducteurs latins des Arabes ont remplacé *gib* par *sinus*, adopté depuis par tous les astronomes.

Voir Delambre, *Histoire de l'astronomie du moyen age* a.1819 p.12.

Jusqu'à Bernoulli le sinus était appelé « sinus rectus »; « sinus totus » était le rayon. Jusqu'à Legendre, a.1840, les sinus était une longueur; seulement quelquefois il suppose le rayon = 1.

La définition analytique du sinus est due à Euler; voir P.2.

cos signifie « complementi sinus ». Voir P.21.

Le symbole « tang » a une origine géométrique.

Nous n'introduirons pas les autres fonctions trigonométriques cotang, sec, cosec qu'on remplace par /tg, /cos, /sin. On pourrait même supprimer toutes les fonctions trigonométriques, car elles ne forment qu'un double emploi avec l'exponentielle  $e^{ix}$ .



Les abréviations s, c, t ont été introduites par Gudermann dans les fonctions elliptiques.

Dans l'usage commun il n'y a pas un système de conventions constantes pour les parenthèses.

Selon les conventions §+109,  $\sin^2 x$  signifie  $\sin(\sin x)$ , et non  $(\sin x)^2$ , qui contrairement à l'usage de plusieurs A. et d'accord avec quelques autres, sera ici indiqué par  $sr^2$ .

\* 3.  $y \in \mathbb{Q} . -1 \leq y \leq 1 . \supset$ .

$$10 \quad \sin^{-1} y = s^{-1} y = \text{arcsin}(s y = y, -\pi/2 \leq x \leq \pi/2) \quad \text{Df}$$

$$\cos^{-1} y = c^{-1} y = \text{arccos}(c y = y, 0 \leq x \leq \pi) \quad \text{Df}$$

$$11 \quad x \in \mathbb{Q} . s x = y \quad . = . \quad x \in (2n\pi + s^{-1} y) \cup (\pi + 2n\pi - s^{-1} y)$$

$$x \in \mathbb{Q} . c x = y \quad . = . \quad x \in (2n\pi + c^{-1} y) \cup (2n\pi - c^{-1} y)$$

$$12 \quad s^{-1} y = -i \log[\sqrt{1-y^2} + iy] \quad . \quad c^{-1} y = -i \log[y + i\sqrt{1-y^2}]$$

$$13 \quad s^{-1} y + c^{-1} y = \pi/2$$

$$14 \quad y \in \mathbb{Q} . \supset . t^{-1} y = \text{arctan}(t y = y, -\pi/2 < x < \pi/2) \quad \text{Df}$$

$$x \in \mathbb{Q} . t x = y \quad . = . \quad x \in n\pi + t^{-1} y$$

$$y \in \mathbb{Q} . \supset . t^{-1} y + t^{-1} y = \pi/2$$

$$t^{-1} y = \log[(1+iy)/(1-iy)]/(2i) \quad \text{EULER a.1748 p.105}$$

$$x \in \mathbb{Q} . y \in \mathbb{Q} . \supset . \log(x+iy) = \log \sqrt{x^2+y^2} + i t^{-1}(y/x)$$

Soit  $y$  une quantité comprise entre  $-1$  et  $+1$ ;  $\sin^{-1} y$  indique la quantité la plus petite en valeur absolue, dont le sinus est  $y$ . De même pour  $\cos^{-1} y$ , qu'on prend entre les limites  $0$  et  $\pi$ ; et  $\tan^{-1} y$ , qu'on prend entre les limites  $-\pi/2$  et  $\pi/2$ .

Ces fonctions sont inverses de  $\sin$ ,  $\cos$ ,  $\tan$ ; mais puisque nous n'avons pas introduit de symbole pour indiquer l'inversion des fonctions, il faut considérer les symboles  $\sin^{-1}$ ..., comme des signes simples.

La notation que nous adoptons est généralement usitée dans les traités anglais. On trouve aussi les notations  $\text{arcsin } y$ ,  $\text{arc}(\sin = y)$ .

Euler, MiscBerol. a.1743 t.7 p.167, a adopté les notations :  $\sin A x$   $\text{Asin } x$ , au lieu de :  $\sin x$ ,  $\sin^{-1} x$ ; où  $A$  est la lettre initiale de Arc.

\* 4.  $x, y, z, t \in \mathbb{Q} . \supset$ .

$$1 \quad s(x-y) s(z-t) + s(y-z) s(x-t) + s(z-x) s(y-t) = 0$$

$$\} \text{PTOLEMÆUS t.1 p.36}$$

$$s(x+y) = s x c y + c x s y \quad c(x+y) = c x c y - s x s y$$

$$, - , , - , , - , , + ,$$

$$\} \text{ABÛ'LEWÊFA a.998; Journal Asiatique a.1892 s.8 t.19 p.419}$$

$$s x + s y = 2 s[(x+y), 2] c[(x-y), 2]$$

$$c x + c y = 2 c[(x+y), 2] c[(x-y), 2]$$

$$c x - c y = 2 s[(x+y), 2] s[(x-y), 2]$$



$$\pi = 16 \text{ t}^{-1}/5 - 4 \text{ t}^{-1}/239 \quad \} \text{MACHIN a.1705 \{}$$

$$\{ (5/5) \} (x, y) \text{P} \cdot 1 \cdot \supset, \text{tng}^{-1} 5/12 = 2 \text{tng}^{-1} 5 \quad (1)$$

$$\{ (5/12, 5/12) \} (x, y) \text{P} \cdot 1 \cdot \supset, \text{tng}^{-1} 120/119 = 1 \text{tng}^{-1} 5 \quad (2)$$

$$(120/119, -1) \} (x, y) \text{P} \cdot 1 \cdot \supset, \text{tng}^{-1} 239 = \text{tng}^{-1} 120/119 - \text{tng}^{-1} 1 \quad (3)$$

$$(2), (3), \text{P} \cdot 3 \supset, \text{Ths} \}$$

$$\cdot 4 \quad (m, n, x, y) 3 [m, n \in \mathbb{N}, x, y \in \mathbb{N}_1, x < y, m^{-1}/x + n^{-1}/y = \pi/4] \\ = \iota(1, 1, 2, 3) \cup \iota(2, -1, 2, 7) \cup \iota(2, 1, 3, 7) \cup \iota(4, -1, 5, 239)$$

$$\} \text{STÖRMER-BSF. a.1899 (27 p.170 \{}$$

$$\pi = 4(\text{t}^{-1}/2 + \text{t}^{-1}/5 + \text{t}^{-1}/8) \quad \} \text{DAVISE a.1844 p.198 \{}$$

$$\pi = 20 \text{ t}^{-1}/7 + 8 \text{ t}^{-13}/79 \quad \} \text{VEGA a.1794 p.633 \{}$$

$$\ast \quad 6. \quad (x, y \in \mathbb{Q}, m \in \mathbb{N}_1, \supset,$$

$$\cdot 1 \quad c(m, x) = \text{real}(c, x + i s, x)$$

$$= \sum_j (-1)^j C(m, 2r)(c, x)^{m-2r}(s, x)^{2r} [r, 0 \cdots E(m/2) \{$$

$$s(m, x) = \text{imag}(c, x + i s, x)$$

$$= \sum_j (-1)^j C(m, 2r+1)(c, x)^{m-2r-1}(s, x)^{2r+1} [r, 0 \cdots E[(m-1)/2] \{$$

\} VIETA a.1615 p.11 : « Si fuerint duo triangula quorum angulus acutus primi  $[x]$ , sit submultiplus ad angulum acutum secundi  $[mx]$  ...

Ad similitudinem laterum circa rectum ... efficitur a base  $[\cos x]$  et perpendiculario  $[\sin x]$  primi ut binomia radice potestas aequae-alta  $\{(\cos x + \sin x)^m\}$ , et singularia facta homogenea distribuuntur in duas partes successive, utrobique primum affirmata, deinde negata, et harum primae parti similis fit basis secundi  $[\cos mx]$ , perpendicularium  $[\sin mx]$  reliquae. \}

$$\cdot 2 \quad s(2m, x) = c, x \sum_j (-1)^j 2^{2r+1} C(m+r, 2r+1)(s, x)^{2r+1} [r, 0 \cdots m-1 \{$$

$$s(2m+1, x) = (2m+1) \sum_j (-1)^j 2^{2r} (2r+1) C(m+r, 2r)(s, x)^{2r+1} [r, 0 \cdots m \{$$

$$s(m, x) = s, x \sum_j (-1)^j C(m-r-1, r)(2c, x)^{m-2r-1} [r, 0 \cdots E[(m-1)/2] \{$$

$$c(2m, x) = 1 - 2m \sum_j (-1)^j 2^{2r} (r+1) C(m+r, 2r+1)(s, x)^{2r+2} [r, 0 \cdots m-1 \{$$

$$c(2m+1, x) = c, x \sum_j (-1)^j 2^{2r} C(m+r, 2r)(s, x)^{2r} [r, 0 \cdots m \{$$

$$2c(m, x) = (2c, x)^m - m \sum_j (-1)^j (r+1) C(m-r-2, r)(2c, x)^{m-2r-2} [r,$$

$$0 \cdots E[(m-2)/2] \{$$

$$\cdot 3 \quad y \in 2n\pi \supset,$$

$$\sum [s(x+2ry) [r, 0 \cdots m] = s(x+my) s[(m+1)y] / sy$$

$$\sum [c(x+2ry) [r, 0 \cdots m] = c(x+my) s[(m+1)y] / sy$$

$$\cdot 4 \quad x \in \mathbb{Q} \cap \pi \supset,$$

$$2 \sum [s(x, x^2) [r, 1 \cdots m] = m - c[(m+1), x] s(mx) / s, x$$

$$2 \sum [c(x, x^2) [r, 1 \cdots m] = m-1 + c(m, x) s[(m+1), x] / s, x$$

·5  $m \varepsilon 2N_1 . x \varepsilon q . \supset$

$$(cx)^m = \sum \{ C(m, r) c[(m-2r).r] \mid r, 0 \cdots (m-2)/2 \} / 2^{m-1} + C(m, m/2) / 2^m$$

$$(sx)^m = (-1)^m \sum \{ (-1)^r C(m, r) c[(m-2r).r] \mid r, 0 \cdots (m-2)/2 \} / 2^{m-1} + C(m, m/2) / 2^m$$

·6  $m \varepsilon (2N_0 + 1) . x \varepsilon q . \supset$

$$(cx)^m = \sum \{ C(m, r) c[(m-2r).r] \mid r, 0 \cdots (m-1)/2 \} / 2^{m-1}$$

$$(sx)^m = (-1)^{m-1/2} \sum \{ (-1)^r C(m, r) s[(m-2r).r] \mid r, 0 \cdots (m-1)/2 \} / 2^{m-1}$$

·7  $m \varepsilon N_1 . x \varepsilon q . (2n+1)\pi/2 . \supset . t(mx) =$

$$\sum \{ (-1)^r C(m, 2r+1) t x^{2r+1} \mid r, 0 \cdots E(m/2) \} \sum \{ (-1)^r C(m, 2r) t x^{2r} \mid r, 0 \cdots E(m/2) \} \\ \{ \text{JOH. BERNOULLI AErud. a.1712 ; Opera t.4 p.113} \}$$

\* 7.  $x \varepsilon q . \supset$

·1  $sx = x - x^3/3! + x^5/5! - \dots = \sum \{ (-1)^n x^{2n+1} / (2n+1)! \mid n, N_0 \}$

$$cx = 1 - x^2/2! + x^4/4! - \dots = \sum \{ (-1)^n x^{2n} / (2n)! \mid n, N_0 \} \\ \{ \text{NEWTON a.1676} \}$$

·2  $y \varepsilon \Theta . \supset . s^{-1}y = y + 1/(2 \times 3) y^3 + (1 \times 3)/(2 \times 4 \times 5) y^5 + \\ (1 \times 3 \times 5)/(2 \times 4 \times 6 \times 7) y^7 + \dots \{ \text{NEWTON a.1676} \}$

·3  $-1 \leq y \leq 1 . \supset . t^{-1}y = y - y^3/3 + y^5/5 - \dots$

$\{ \text{LEIBNIZ a.1673-74, MathS. t.5 p.401} \}$

$\{ \text{J. GREGORIUS } \textit{Commercium epistolicum} \text{ a.1671 (?) } \}$

·4  $\text{mod } x < 1 . m \varepsilon q . \supset$

$$s(ms^{-1}x) = mx + \sum \{ m \Pi [(2r+1)^2 - m^2] \mid r, 0 \cdots n \} x^{2n+3} / (2n+3)! \mid n, N_1 \}$$

·5  $\text{Hp}4 . \supset . c(ms^{-1}x) =$

$$1 + \sum \{ (-1)^{n+1} \Pi [(m^2 - 4r^2)] \mid r, 0 \cdots n \} x^{2n+2} / (2n+2)! \mid n, N_0 \}$$

\* 8.  $x \varepsilon q . \supset$

·1  $sx = x \Pi [(1 - x^2 n^{-2} \pi^{-2}) \mid n, N_1] \{ \text{EULER a.1748 p.120} \}$

$$cx = \Pi [1 - 4x^2 n^{-2} \pi^{-2}] \mid n, 2N_0 + 1 \} \{ \text{EULER a.1748 p.120} \}$$

·2  $-\pi < x < \pi . \supset . x/2 = sx - s(2x)/2 + s(3x)/3 - \dots$

$\{ \text{EULER PetrNC. a.1760 t.5 p.204} \}$

·21  $x \varepsilon 2\theta\pi . \supset . sx + s(2x)/2 + s(3x)/3 + \dots = (\pi - x)/2$

$[ (\pi - x) \mid x \text{ P} . 2 . \supset . \text{P} ]$

·22  $x \varepsilon q . \supset . sx + s(2x)/2 + s(3x)/3 + \dots = (\pi - x) z + \pi E[x/(2\pi)]$

·23  $x \varepsilon \theta\pi . \supset . sx + s(3x)/3 + s(5x)/5 + \dots = \pi/4$

$\{ \text{FOURIER a.1822 p.164} \}$

·3  $x \varepsilon (-\pi)^{-\pi} . \supset . \log[(sx)/x] = -x^2 \pi^{-2} \sum N_1^{-2} - x^4 \pi^{-4} \sum N_1^{-4} / 4 - \dots$

$$= -\sum \{ (x/\pi)^{2n} \sum N_1^{-2n} / n \} \mid n, N_1 \} \{ \text{EULER a.1748 p.152} \}$$

- \*4  $-\pi/2 < x < \pi/2 \Rightarrow \log \operatorname{er} =$   
 $-\sum_1^{\infty} (x/\pi)^{2n} (2^{2n}-1) \sum N_1^{-2n}/n \mid n, N_1 \{ \}$  EULER a.1748 p.152 {
- \*3  $-\pi/2 < x < \pi/2 \Rightarrow \operatorname{tr} = 2 \sum_1^{\infty} [(2^{2n}-1) \pi^{-2n} \sum N_1^{-2n} x^{2n-1}] \mid n, N_1 \{ \}$
- \*6  $-\pi < x < \pi, x \neq 0 \Rightarrow$   
 $/\operatorname{tr} = /x - 2 \sum_1^{\infty} [\pi^{-2n} x^{2n-1} \sum N_1^{-2n}] \mid n, N_1 \{ \}$
- \*7  $x \in \mathbb{Q} \Rightarrow \pi / \operatorname{t}(\pi, x) = /x + 2x \sum_1^{\infty} [/ (x^2 - n^2) \mid n, N_1 \{ \}$   
 $= \lim [ \sum_1^{\infty} (x - r^2) / (r^2 - n^2) \mid n \dots ]$  EULER a.1748 p.159 {
- \*8  $\pi = 4 \sum_1^{\infty} \operatorname{tr}^{-1} (2n^2) \mid n, N_1 \{ \}$

\* 9.

- \*1  $a \in (\mathbb{Q} \setminus \mathbb{N})_{\text{decr}}, \lim a = 0, x \in \mathbb{Q} \Rightarrow 2n\pi \Rightarrow \sum [a, s(x)] \mid r, N_1 \{ \} \varepsilon \mathbb{Q}$
- \*2  $\text{-----}, x \in \mathbb{Q} \Rightarrow \sum [a, s(x)] \mid r, N_1 \{ \} \varepsilon \mathbb{Q}$
- \*3  $x \in \mathbb{Q} \Rightarrow \log 2c(x/2) = cx - c(2x)/2 + c(3x)/3 - \dots$
- \*4  $x \in \mathbb{Q}, \mid \operatorname{mod} r < 1 \Rightarrow$   
 $\log \sqrt[4]{(1+2rcx+r^2)} = rcx - r^2 c(2x)/2 + r^3 c(3x)/3 - \dots$   
 $\{ \text{34 ABEL t.1 p.247 } \}$
- \*11  $\operatorname{Hp} 4 \Rightarrow -\log \sqrt[4]{(1+2rcx+r^2)} = rcx + r^2 c(2x)/2 + \dots$
- \*5  $x \in \mathbb{Q} \Rightarrow \log [2s(x/2)] =$   
 $-cx - c(2x)/2 - c(3x)/3 - \dots \{ \text{ABEL t.1 p.247 } \}$
- \*6  $x \in \mathbb{Q}, \mid \operatorname{mod} r < 1, x \in \mathbb{Q} \Rightarrow \operatorname{tr}^{-1} [r s x / (1+rcx)] =$   
 $rsx - r^2 s(2x)/2 + r^3 s(3x)/3 - \dots$   
 $\{ \operatorname{Hp}, \S \pi \text{ P4.2 } \Rightarrow \operatorname{tr}^{-1} [r s x / (1+rcx)] = \operatorname{imag} \log (1+re^{ix}) =$   
 $\operatorname{imag} re^{ix} - r^2 e^{2ix}/2 + \dots = r s x - r^2 s(2x)/2 + \dots \}$
- $\operatorname{tr}^{-1} [r s x / (1+rcx)] = \sum [r^n s(n, x) / n \mid n, N_1 \{ \}$
- $(-2) \operatorname{tr}^{-1} [(2r s x) / (1-r^2)] = \sum [r^{2n-1} s[(2n+1)x] / (2n+1) \mid n, N_0 \{ \}$
- $-(-2) \operatorname{tr}^{-1} [(2rcx) / (1+r^2)] = \sum [(-r)^{2n-1} c[(2n+1)x] \dots \dots \{ \}$

$\}$  LOBATTO, *Recherches sur la sommation de quelques séries trigonométriques*, Delft a.1827 {

\* 10.1  $p, q \in \mathbb{Q}, q^2 < p^3 \Rightarrow$ 

$$q^4 x^3 (x^3 - 3px + 2q = 0) = 2 \sqrt[4]{p} c_1 [c^{-1}(q/p^{-3/2}) + (0 \dots 2)\pi] \{ \}$$

$\}$  VIETA Opera a.1615 p.159 {

D \* 11.

\*1  $x \in \mathbb{Q} \Rightarrow \operatorname{D}(s, q, x) = cx, \operatorname{D}(c, q, x) = -sx$

\*2  $x \in \mathbb{Q} \Rightarrow \pi/2 \Rightarrow$

$$\operatorname{D}(\operatorname{tng}, q \Rightarrow \pi/2, x) = /(\cos x)^2 = 1 + (\operatorname{tng} x)^2$$

- 3  $x \in (-1)^{-1} \cdot \supset. D(\sin^{-1}, -1^{-1}, x) = \sqrt[4]{1-x^2}$   
 $\quad \quad \quad D(\cos^{-1}, \quad \quad \quad) = -\sqrt[4]{1-x^2}$
- 4  $x \in \mathbb{Q} \cdot \supset. D(\operatorname{tng}^{-1}, q, x) = \sqrt[4]{1+x^2}$
- 5  $n \in \mathbb{N}_1 \cdot x \in \mathbb{Q} \cdot \supset. D^n(\sin, q, x) = \sin(x+n\pi/2)$   
 $\quad \quad \quad D^n(\cos, q, x) = \cos(x+n\pi/2)$
- 6  $\operatorname{Hp} 5 \cdot a, b \in \mathbb{Q} \cdot \supset.$   
 $D^n[\sin(ax+b) | x, q, x] = a^n \sin(ax+b+n\pi/2)$
- S \* 12·1  $m, n \in \mathbb{N} \cdot m^2 = n^2 \cdot \supset.$   
 $S[\sin(mx) \sin(nx) | x, \theta\pi] = S[(\cos mx \cos nx) | x, \theta\pi] = 0$
- 11  $m \in \mathbb{N}_1 \cdot \supset. S[(\cos mx)^2 | x, \theta\pi] = S[(\sin mx)^2 | x, \theta\pi] = \pi/2$   
 $[§\pi 11 \cdot \supset. P]$
- 2  $m, n \in \mathbb{Q}_0 \cdot \supset. S[x^m(1-x)^n | x, \theta] =$   
 $2S[(\sin x)^{2m+1}(\cos x)^{2n+1} | x, \theta\pi/2]$
- 3  $S[(\sin x)^2 | x, \theta\pi/2] = \pi/4$
- 4  $n \in \mathbb{N}_1 \cdot \supset. S[(\sin x)^{2n} | x, \theta\pi/2] = H[1-(2r)] | r, 1 \cdots n \times \pi/2$
- 5  $a, b \in \mathbb{Q} \cdot \supset. S[1/((a \sin x)^2 + (b \cos x)^2) | x, \theta\pi/2] = \pi/(2ab)$
- 6  $a \in \mathbb{Q} \cdot b \in \mathbb{Q} \cdot a^2 > b^2 \cdot \supset. S[1/(a+b \cos x) | x, \theta\pi] = \pi/\sqrt[4]{a^2-b^2}$
- 61  $z \in \theta\pi/2 \cdot \supset. S[1/(1+\cos z \cos x) | x, \theta\pi] = \pi/\sin z$
- 7  $a \in \mathbb{Q} \cdot b, c \in \mathbb{Q} \cdot a^2 > b^2 + c^2 \cdot \supset.$   
 $S[1/(a+b \cos x + c \sin x) | x, \theta 2\pi] = 2\pi/\sqrt[4]{a^2-b^2-c^2}$
- 8  $z \in \theta\pi \cdot \supset. S[1/(1-2x \cos z + x^2) | x, \theta] = \pi/(4 \sin z)$   
 $\quad \quad \quad \{ \text{EULER Calc. int. t.4 s.5 p.46} \}$
- 9  $m, n \in \mathbb{N}_1 \cdot m < n \cdot \supset. S[x^{m-1}/(1+x^n) | x, Q] = \pi/[n \sin(m\pi/n)]$
- 91  $a \in \theta \cdot \supset. S[x^{a-1}/(1+x) | x, Q] = \pi/(\sin a\pi)$
- \* 13·1  $S\{(\sin x)/x | x, Q\} = S\{(\sin x/x)^2 | x, Q\} = \pi/2$
- 2  $S\{\cos x/\sqrt[4]{x} | x, Q\} = S\{\sin x/\sqrt[4]{x} | x, Q\} = 2S[\sin(x^2) | x, Q]$   
 $= 2S[\cos(x^2) | x, Q] = \sqrt[4]{\pi/2} \quad \{ \text{FRESNEL a.1818 t.1 p.178} \}$
- Fresnel a aussi calculé une table de la même intégrale entre des limites variables.
- 3  $S\{x \sin x/[1+(\cos x)^2] | x, \theta\pi\} = \pi^2/4$
- 4  $a \in \mathbb{Q} \cdot b \in \mathbb{Q} \cdot \supset. S(e^{-ax} \cos bx | x, Q) = a/(a^2+b^2)$   
 $\quad \quad \quad S(e^{-ax} \sin bx | x, Q) = b/(a^2+b^2)$
- 5  $S(\log \sin, \theta\pi/2) = -(\pi \log 2)/2$

\* 14.1  $a, b \in \mathbb{Q} : E(a, b) = S \int [(a \cos v)^2 + (b \sin v)^2] |v|, 2\pi \Theta \} \cdot \supset.$

$$E(a, b) = 2\pi a \{ 1 - \sum [ H_n [1 - (2v)^2] |v|, 1 \dots n \} (1 - b^2/a^2)^n / (2n-1) |n, N_1 \} \}$$

$$= \pi(a+b) \sum \{ (v/2, n)^2 [(a-b)/(a+b)]^{2n} |n, N_0 \}$$

$$= \pi(a+b) \{ 1 + [(a-b)/(a+b)]^2/4 + [(a-b)/(a+b)]^4/64 - \dots \}$$

·2  $\text{Hpr} : a = b \cdot \supset. E(a, b) > \pi(a+b) \cdot$

$$E(a, b) < \pi(a+b) + \pi(\sqrt{a} - \sqrt{b})/2$$

· KEPLERUS a.1609 t.3 p.401 :

« Tota elliptica circumferentia est proxime medium arithmeticum inter circulum diametri longioris et circulum diametri brevioris » .

Sur les formules d'approximation pour la rectification de l'ellipse voir CR. a.1889 p.360.

·3  $a, b, c, d \in \mathbb{Q} : 2c = a+b : d^2 = ab \cdot \supset.$

$$S \int [(acx)^2 + (bsx)^2] |x|, \Theta\pi/2 \} = S \int [(ccx)^2 + (dsx)^2] |x|, \Theta\pi/2 \}$$

$\pi/S \int [ (acx)^2 + (bsx)^2 ] |x|, \Theta\pi/2 \}$  est dit, par Gauss t.3 p.360, la « Arithmetisch-geometrisches Mittel » entre  $a$  et  $b$ . Cette moyenne ne varie pas si l'on remplace  $a$  et  $b$  par leurs moyennes arithmétique et géométrique.

\* 15.  $a \in \mathbb{Q} \cdot \supset.$

·1  $\text{sgna} = 2/\pi S \{ (\sin av)/v |v, Q \}$

·2  $\text{moda} = 2/\pi S \{ (\sin av)^2/x^2 |x, Q \}$

·3  $a, b \in \mathbb{Q} \cdot \supset. 2S \{ (\sin av \sin bv)/x^2 |x, Q \} = \pi \min(a \cup b)$

\* 16.  $a \in \theta\pi/2 \cdot \supset.$

·1  $S \{ (\text{tng} x)^2 |x, \Theta a \} = \text{tnga} - a \cdot$  ·2  $S \{ \text{tng}, \Theta a \} = -\log \cos a$

·3  $S \{ 1/\cos, \Theta a \} = \log \{ \text{tnga} + (\cos a)^{-1} \}$

· 14-3 COTES a.1722 p.78-81 }

Continuation : §vct P31-35.





- 21  $n \in N_1 \cup (2^{2n}-1)B_n \in N_1$   
 } GENOCCHI Ann. di Tortol. a.1852 t.3 p.399 {
- 22  $n \in N_1 \cup \beta[(-1)^n B_n] = \sum N_p \cap \beta[2n \in (s-1) \times N_1]$   
 } STAUDT JfM. a.1840 t.21 ; CLAUSEN, Astron. Nachr. t.17 {
- 23  $n \in N_p \cap (N_1+3) \cup n \in B_n \in n \times N_1$   
 } ADAMS a.1878 JfM. t.85 p.269 {
- lim 23 lim B =  $\infty$
- log C 24  $a \in N_1, n \in N_1+1 \cup \sum (1 \cdots a) \in \log a + C + (2a) +$   
 $\sum [(-1)^r B_r (2r a^{2r}) / r, 1 \cdots (n-1)] + \theta(-1)^n B_n (2n a^{2n})$   
 } EULER PetrNC. a.1769 t.14 i p.153 {
- 25  $n \in N_1 \cup \sum (N_1^{-2n}) = 2^{2n-1} \pi^{2n} B_n / (2n)!$   
 $2 \sum (2N_0+1)^{-2n} = -\sum [(-1)^r r^{2n} / r, N_1] = (2^{2n}-1) \pi^{2n} B_n / (2n)!$
- 26  $\lim (n^2 B_n / B_{n+1}) / n = \pi^2$
- 27  $\lim B_n (\pi e / n) / (2n+2) / n = 4\pi e$
- 28  $n \in N_1 \cup S[x^{2n-1} (e^{2\pi x} - 1) / r, Q] = B_n / (4n)$   
 } EULER PetrNC. a.1769 t.14 i p.151 {

- \* 21  $x \in q=0 \pmod{x < 2\pi} \cup$   
 $x'(e^x - 1) = 1 - x^2 + \sum [(-1)^{r+1} B_r x^{2r} / (2r)! / r, N_1]$
- 2  $a \in N_1, n \in N_1+1 \cup \log a! \in (\log 2\pi)^2 - a + (a+2) \log a +$   
 $\sum [(-1)^r B_{r+1} / [(2r+1)(2r+2)] a^{-2r+1} / r, 0 \cdots (n-1)] +$   
 $\theta(-1)^n B_{n+1} / [(2n+1)(2n+2)] a^{-2n+1}$  } STIRLING a.1730 {
- 3  $x \in q=0 \pmod{x < \pi} \cup$   
 $1/\sin x = 1/x + \sum [2(2^{2n+1}-1) B_{n+1} x^{2n+1} / (2n+2)! / n, N_1]$
- 4  $x \in q \pmod{x < \pi} \cup$   
 $\tng x = \sum [2^{2n} (2^{2n}-1) B_n x^{2n-1} / (2n)! / n, N_1]$
- 5  $\text{Hp} 3 \cup \tng x = 1/x - \sum [2^{2n} B_n x^{2n-1} / (2n)! / n, N_1]$
- 6  $\text{Hp} 3 \cup \log(\sin x / x) = -\sum [2^{2n-1} B_n x^{2n} / [n(2n)!] / n, N_1]$
- 7  $x \in q \pmod{x < \pi/2} \cup$   
 $\log \cos x = -\sum [(2^{2n}-1) 2^{2n-1} B_n / [n(2n)!] x^{2n} / n, N_1]$
- 8  $x \in q=0 \pmod{x < \pi/2} \cup$   
 $\log(\tng x / x) = \sum [(2^{2n-1}-1) 2^{2n} B_n / [n(2n)!] x^{2n} / n, N_1]$



On rencontre la même remarque dans W. Hamilton, a.1845, Cambridge Journ. t.I, p.47:

«... the symbolic equation,  $D \cdot C = B \cdot A$ , may denote that the point D is ordinarily related (in space) to the point C as B is to A, and may in that view be expressed by writing the *ordinal analogy*,  $D..C::B..A$ : which admits of *inversion* and *alternation*.»

Cette notation est aussi une conséquence immédiate des formules de Möbius a.1827; plus clairement a.1844 p.608; mais ces A. n'ont pas fait un usage constant de cette notation.

Comme Euclide définit l'égalité des segments par le mouvement en général, on peut expliquer l'égalité des vecteurs  $a-b = c-d$  par «on peut amener les points  $a$  et  $b$  à coïncider avec  $c$  et  $d$  par un mouvement de translation».

Nous considérons cette relation comme une idée primitive, que nous déterminerons par des Pp. d'où découlent toutes les propriétés géométriques.

On peut remarquer dans la notation que nous suivons une économie non seulement sur le langage ordinaire, mais aussi sur les anciennes notations de Wessel, Bellavitis.... Ils écrivent en effet:

1.  $AB = -BA$ ,  $AB + BC = AC$ , de  $AB = CD$  on déduit  $AC = BD$  au lieu de:

2.  $A-B = -B-A$ ,  $A-B + B-C = A-C$ , de  $A-B = C-D$  on déduit  $A-C = B-D$ .

Dans les notations 1 on doit apprendre un nouveau calcul, assujetti, à des règles spéciales; dans les notations 2 on retrouve dans la forme les règles bien connues par l'Algèbre.

- |   |  |    |             |
|---|--|----|-------------|
| 1 | $a-b = a-b$  | Pp | Ex: 42      |
| 2 | $a-b = c-d \text{ } \supset \text{ } c-d = a-b$                      | Pp | Ex: 41      |
| 3 | $a-b = c-d \text{ } , c-d = e-f \text{ } \supset \text{ } a-b = e-f$ | Pp | Ex: 3.11.21 |

Les Pp 1.2.3 ont la forme d'identités de Logique, §1 P10, mais elles expriment des faits géométriques. Pour reconnaître leur indépendance, donnons à la relation fondamentale  $a-b = c-d$  successivement les interprétations

«les points  $a, b, c, d$  coïncident.

«la distance  $ab \equiv$  la distance  $cd$ »

«les quatre points sont dans un même plan»;

alors seront respectivement vérifiées les P 2 et 3, et non la 1, les 1 et 3, et non la 2, les 1 et 2 et non la 3.

- |   |   |    |           |
|---|---|----|-----------|
| 4 | $a-b = c-d \text{ } \supset \text{ } a-c = b-d$ | Pp | } Altern{ |
|   | Ex: 41 42 3.26 28                               |    |           |

} EUCLIDES, I, P33;

Αἱ τὰς ἴσας τε καὶ παραλλήλους ἐπὶ τὸ αὐτὸ μέτρον ἐπιτετραγμένους εὐθεῖαι καὶ αὐταὶ ἴσας τε καὶ παραλλήλοι εἶναι. }

La P.4 permet de permuter les termes moyens dans l'équidifférence géométrique. Cette Pp est indépendante des précédentes, car si par  $a-b=c-d$  on entend « distance  $ab$  = distance  $cd$  », les P.1.2.3 seront vérifiées mais non la .4. Nous l'appelons « alterner ».

$$\begin{aligned} \cdot 41 \quad a-b=c-d & \text{.} \text{=} a-c=b-d \text{.} \text{=} b-a=d-c \text{.} \text{=} b-d=a-c \\ & \text{.} \text{=} c-a=d-b \text{.} \text{=} c-d=a-b \text{.} \text{=} d-b=c-a \\ & \text{.} \text{=} d-c=b-a \end{aligned} \quad [ \text{P.2. Altern. } \supset \text{P} ]$$

P.41. On déduit que l'équidifférence entre 4 points peut se mettre sous 8 formes différentes, comme les équidifférences numériques.

$$\cdot 42 \quad a-a=b-b \quad \text{Ex : 3.11} \quad [ \text{P.1. Altern. } \supset \text{P} ]$$

$$\cdot 5 \quad a-c=b-c \text{.} \supset a=b \quad \text{Ex : 3.13.21} \quad \text{Pp}$$

P.5. Si à la relation fondamentale on attribue la signification « la relation  $a'-b' = c'-d'$  subsiste entre les projections de  $a, b, c, d$  sur un plan fixe », cette Pp5 ne sera pas vérifiée, bien que toutes les précédentes le soient.

$$\cdot 6 \quad \exists \text{ pnt } x \exists (x-a=b-c) \quad \text{Ex : 3.21} \quad \text{Pp}$$

P.6. Si nous appelons « pnt » les points d'une figure finie, p. ex. intérieurs à une sphère, toutes les P précédentes seront vérifiées, mais non la nouvelle Pp.

$$\ast \quad 3.0 \quad \text{vct} = x \exists [ \exists (a, b) \exists (a, b \in \text{pnt} . x = b-a) ] \quad \text{Df}$$

$$\cdot 01 \quad \text{vct} = \text{pnt} - \text{pnt}$$

Le mot « vector » a été introduit par Hamilton a.1845 p. 56. Il vient de « vehere » car il représente une translation.

$$\cdot 1 \quad 0 = \exists x \exists (a \in \text{pnt} . \supset_{\sigma} x = a-a) \quad \text{Df}$$

$$\cdot 11 \quad 0 \in \text{vct} \quad \cdot 12 \quad a \in \text{pnt} . \supset a-a=0 \quad \text{Ex : } \cdot 13$$

$$[ b \in \text{pnt} . \text{P.2.42} . \supset : a \in \text{pnt} . \supset_a b-b = a-a \quad (1)$$

$$b \in \text{pnt} . (1) . \supset . \exists x \exists (a \in \text{pnt} . \supset_a x = a-a) \quad (2)$$

$$(2) \text{ Elim } b . \text{P.1.2} . \supset . \text{-----} \quad (3)$$

$$a \in \text{pnt} . \supset . x = a-a . y = a-a . \text{P.2.3} . \supset . x=y \quad (4)$$

$$(3) . (4) . \S \text{ P.1} . \supset . \text{P.11.12} ]$$

$$\cdot 13 \quad a, b \in \text{pnt} . \supset : a=b \text{.} \text{=} a-b=0$$

$$[ \text{Hp. } a=b . \text{P.12} . \supset . a-b=0 . \text{P.12} . \supset . a-b=b-b \quad (1)$$

$$\text{P.2.5} . \supset . a=b \quad (2)$$

$$(1) . (2) . \supset . \text{P} ]$$

La P.1 définit le vecteur nul, qui est la valeur constante de l'expression  $a-a$ , quelque soit le point  $a$ .

La Dem. des P.11.12 prouve que cette expression a une et une seule valeur. On ne peut pas prendre comme Df la P.12, car elle n'est pas homogène.

$a, b \varepsilon \text{pnt} , u, r, w \varepsilon \text{vet} . \supset :$

- 2  $a+u = \text{pnt} \wedge \exists x(x-a=u)$  Df
- 21  $a+u \varepsilon \text{pnt}$  ·22  $(a+u)-a=u$  Ex : ·33·34  
 [ P·2·6 .  $\supset$  .  $\exists \text{pnt} \wedge \exists x(x-a=u)$  (1)  
 $x, y \varepsilon \text{pnt} , x-a=u , y-a=u , \text{P} \cdot 2 \cdot 3 . \supset . x-a=y-a , \text{P} \cdot 2 \cdot 5 . \supset . x=y$  (2)  
 (1) . (2) . § P·1 .  $\supset$  . P·21·22 ]
- 23  $a+(b-a)=b$  ·24  $b-a=u \text{ .} \text{ .} b=a+u$  Ex : ·27
- 25  $a+u+r=(a+u)+r$  Df
- 26  $(a+u)-(b+u)=a-b$  [  $(a+u, a, b+u, b) \vdash (a, b, c, d) \text{P} \cdot 2 \cdot 4 . \supset . \text{P}$  ]
- 27  $a+u+r=a+r+u$   
 [  $(a+r, a) \vdash (a, b) \text{P} \cdot 2 \cdot 6 . \supset . (a+r+u)-(a+u)=r , \text{P} \cdot 24 . \supset . \text{P}$  ]
- 28  $(a+u+r)-a=(b+u+r)-b$   
 [ P·26 .  $\supset$  .  $(a+u+r)-(b+u+r)=(a+u)-(b+u)=a-b , \text{P} \cdot 2 \cdot 4 . \supset . \text{P}$  ]
- 3  $u+r = \text{pnt} \supset \exists a [ a \varepsilon \text{pnt} . \supset a . x=(a+u+r)-a ]$  Df
- 31  $u+r \varepsilon \text{vet}$  ·32  $u+r=(a+u+r)-a$  [ P·28 .  $\supset . \text{P}$  ]
- 33  $a+u+r=a+(u+r)$  [ P·32 . P·22 .  $\supset . \text{P}$  ]
- 34  $u+r=r+u$  [ P·27 . P·22 .  $\supset . \text{P}$  ] } Comm+ {
- 35  $u+(r+w)=(u+r)+w$  } Assoc+ {  
 [ P·33 .  $\supset$  .  $a+(u+(r+w))=(a+(u+r))+w=(a+(u+r)+w)=(a+u)+(r+w)=a+(u+(r+w)) , \text{P} \cdot 22 . \supset . \text{P}$  ]
- 4  $-u = \text{vet} \wedge \exists x(u+x=0)$  Df
- 41  $-u \varepsilon \text{vet}$  ·42  $-(-u)=u$  ·43  $-(a-b)=b-a$
- 44  $u-r=u+(-r)$  Df ·45  $u-u=0$

$\Sigma \quad * \quad 4. \quad \text{vet} [N_0] \S \Sigma \text{P}1$

$n \times \quad * \quad 5. \quad u, r \varepsilon \text{vet} , m \varepsilon N_1 , a, b \varepsilon n . \supset :$

- 0  $0u=0$  .  $mu=(m-1)u+u$  .  $(-m)u=-(mu)$  Df
- 01  $mu=\Sigma n(u \text{ F } 1 \cdots m)$  Df<sub>p</sub>
- 1  $au \varepsilon \text{vet}$  ·11  $ua=au$  Df
- 2  $(a+b)u=au+bu$  } Distrib( $\times$ , +) {  
 [  $m, n \varepsilon N_1 , \text{P} \cdot 0 \cdot 3 , \text{P} \cdot 4 \cdot 31 . \supset . (m+n)u = \Sigma n[ua \text{ F } 1 \cdots (m+n)] =$   
 $= \Sigma [ua \text{ F } 1 \cdots m] + \Sigma [ua \text{ F } (m+1) \cdots (m+n)] = mu + nu$  (1)  
 (1) . P·0 . P·02 .  $\supset . \text{P}$  ]
- 3  $a(u+r)=au+ar$  } Distrib( $\times$ , +) {  
 [  $m \varepsilon N_1 , \text{P} \cdot 0 \cdot 3 . \supset . m(u+r) = \Sigma n[ua(u+r) \text{ F } (1 \cdots m)]$   
 $= \Sigma n[ua \text{ F } 1 \cdots m] + \Sigma n[ur \text{ F } 1 \cdots m]$   
 $= mu + mr$  (1) . P·0 . P·02 .  $\supset . \text{P}$  ]

- 4  $f \varepsilon \text{vct } F \ 1 \cdots m \ . \supset . \Sigma(af) = a \Sigma f$   
 ·5  $(ba)u = b(au)$  } Assoc \times \}  
 $[m \varepsilon N_1 . [b(auF1 \cdots m) | f'] P.4 \ . \supset . m(au) = a(mu)$  (1)  
 (1) . P.0.02 .  $\supset . P$  ]  
 ·6  $mu = 0 \ . \supset . u = 0$  Pp

*Note.* On satisfait à toutes les Pp précédentes, mais non à la nouvelle ·6 si, en considérant les points d'une circonférence, l'on dit que  $a-b = c-d$  si l'on peut amener les points  $a$  et  $b$  à coïncider avec  $c$  et  $d$  par une rotation autour du centre. Le 0 représentera alors l'identité, et une rotation répétée peut produire l'identité. Un autre exemple est fourni par les vecteurs sphériques, considérés par Möbius.

- 7  $mu = mv \ . \supset . u = v$   
 [ Hp .  $\supset . mu - mv = 0$  . P.3 .  $\supset . m(u-v) = 0$  . P.6 .  $\supset . \text{Ths}$  ]

n / r \* 6.  $u, v \varepsilon \text{vct} . m, n \varepsilon N_1 . a, b \varepsilon r \ . \supset .$

- 0  $u/m = r \text{vct} \wedge v \varepsilon (mv = u)$  Df  
 ·1  $\exists \text{vct} \wedge v \varepsilon (mv = u)$  Pp

*Note.* On vérifie toutes les Pp précédentes, mais non la ·1, si l'on remplace « pnt » par « n »

- 2  $u/m \varepsilon \text{vct} \ . \ m(u/m) = u$   
 ·3  $p, q \varepsilon n \ . \ p/m = q/n \ . \supset . (up)/m = (uq)/n$   
 [ Hp .  $\supset . pn = qm \ . \supset . u(pn) = u(qm)$  . P5.5 .  $\supset . (up)n = (uq)m$  . P.2 .  $\supset .$   
 $(up/m)mn = (uq/n)mn$  . P5.7 .  $\supset . \text{Ths}$  ]  
 ·4  $au = r \vee \exists [ m \varepsilon N_1 . p \varepsilon n \ . \ p/m = a \ . \supset m.p. \ v = up/m ]$  Df  
 ·5  $au \varepsilon \text{vct} \ . \ (a+b)u = au + bu \ . \ a(u+r) = au + ar \ .$   
 $(ab)u = a(bu) = abu$   
 ·6  $au = 0 \ . \equiv . a = 0 \ . \wedge . u = 0$

r  $\Sigma$  \* 7.

- $m, n \varepsilon N_1 . a \varepsilon \text{pnt } F \ 1 \cdots m \ . \ x \varepsilon rF1 \cdots m \ . \ b \varepsilon \text{pnt } F1 \cdots n \ . \ y \varepsilon rF1 \cdots n \ . \supset .$   
 ·0  $\Sigma(x_r a_r | r, 1 \cdots m) = 0 \ . \equiv . c \varepsilon \text{pnt} \ . \supset . \Sigma[x_r(a_r - c) | r, 1 \cdots m] = 0$  Df  
 ·1  $\Sigma(xa) = \Sigma(yb) \ . \equiv . \Sigma(xa) + \Sigma(-yb) = 0$  Df  
 ·2  $p \varepsilon \text{pnt} \ . \supset . \Sigma(xa) = (\Sigma x)p + \Sigma[x_r(a_r - p) | r, 1 \cdots m]$   
 ·3  $\Sigma x = 0 \ . \supset . \Sigma(xa) \varepsilon \text{vct}$   
 ·4  $\Sigma x = 0 \ . \supset . (\Sigma xa) / (\Sigma x) \varepsilon \text{pnt}$

*Note.* Soient  $a, b, c, \dots$  des points. Nous avons donné une signification aux formules  $a-b$  (P2.0),  $a+(b-c)$  (P3.2),  $(a-b)+(b-c)$  (P3.3).

Nous voulons maintenant introduire des expressions de la forme

$$x_1 a_1 + x_2 a_2 + \dots + x_n a_n, \text{ ou } \sum x_i a_i \ (i=1, \dots, n),$$

où les  $x$  sont des nombres rationnels et les  $a$  des points. Nous définissons d'abord l'égalité  $x_1 a_1 + \dots = 0$ , (P.0), et ensuite l'égalité de deux sommes de points. Si la somme des coefficients numériques est nulle, alors la somme des points est réductible à un vecteur (P.3). Si cette somme n'est pas nulle alors la somme des points divisée par la somme des coefficients numériques est un point. Ce point s'appelle le « barycentre » des points donnés avec des masses (positives ou négatives) mesurées par leurs coefficients.

Le barycentre se présente d'abord dans la mécanique; Archimède l'appelle *ζέντρον τοῦ πάρος*. Carnot a.1801 l'a défini par des seules idées géométriques, en l'appellant « centre des moyennes distances » (p.154). L'expression  $\sum x a / \sum x$  pour indiquer le barycentre se rencontre dans Möbius, a.1827 t.1 p.37.

+  $\times$  q \* 8.  $u, v, w \in \text{vet}, m \in N_1, p \in N, r \in R, \supset$ .

0  $u \times v =$  « produit (intérieur ou scalaire) des vecteurs  $u$  et  $v$ , déterminé par les Pp 1.2.3 9.1 ».

1  $u \times v \in q$  Pp

2  $u \times v = v \times u$  Pp {CommX}

3  $(u+v) \times w = u \times w + v \times w$  Pp {Distrib(X,+)}

Pour définir les propriétés métriques des figures, comme longueurs, angles,... et aussi le produit d'un nombre irrationnel par un vecteur, nous introduisons, comme une nouvelle idée primitive le produit  $u \times v$ .

On peut relier la fonction  $u \times v$  aux idées communes par la P31.3. Le produit d'un vecteur par lui-même est le carré de sa longueur. Le produit de deux vecteurs orthogonaux est 0.  $u \times v$  est le travail mécanique d'une force représentée par le vecteur  $u$ , lorsque le point d'application reçoit un déplacement représenté par  $v$ .

Ce produit se rencontre dans Euclide sous la forme d'une longue périphrase (Voir P.61).

H. Grassmann a.1846 t.1 p.345, après y avoir reconnu les propriétés commutative (P.2) et distributive (P.3), l'appelle « innere Product », et le désigne par la notation que nous suivons, adopté aussi par Resal, Somoff,... Grassmann a.1862 a indiqué la même fonction par  $u|v$ , en la décomposant dans le produit de  $u$  par un nouvel objet  $|v$ .

Cette fonction se rencontre aussi indirectement dans les quaternions de Hamilton, où est indiquée par  $-Sur$ . En conséquence, selon Hamilton, on a  $u^2 = -(\text{mod} u)^2$ , contrairement à la Pp 9.1.

Grassmann a aussi considéré le produit extérieur de deux vet, qui coïncide à peu près avec le vecteur du produit des deux vet, selon Hamilton. Ce produit a la propriété distributive, mais non la commutative.

- 31  $0 \times u = 0$  [  $(0, 0, u)(u, v, w)$  P·3  $\supset$  P ]  
 ·32  $f \varepsilon \text{vct F } 1 \cdots m \supset (\Sigma f) \times v = \Sigma(f \times v)$  [ P·3  $\supset$  P ]  
 ·33  $(mu) \times v = m(u \times v)$  [  $\{p(uF1 \cdots m) \mid f\}$  P·32  $\supset$  P ]  
 ·34  $(-u) \times v = -(u \times v)$  [  $(-u, v)(v, w)$  P·3 . P·31  $\supset$  P ]  
 ·35  $(-mu) \times v = -m(u \times v)$  [ P·34 . P·33  $\supset$  P ]  
 ·36  $(pu) \times v = p(u \times v)$  [ = P·31·33·35 ]  
 ·37  $(u/m) \times v = (u \times v)/m$  [  $(u/m) \mid u$  P·33  $\supset$  P ]  
 ·38  $(up/m) \times v = (u \times v)p/m$  [  $(up) \mid u$  P·37 . P·33  $\supset$  P ]  
 ·39  $(xu) \times v = x(u \times v)$  [ P·38  $\supset$  P ]  
 ·40  $u^2 = u \times u$  Df  
 ·41  $(u+v)^2 = u^2 + 2u \times v + v^2$   
 ·42  $(u+v+w)^2 = u^2 + v^2 + w^2 + 2u \times v + 2u \times w + 2v \times w$   
 ·43  $(u+v) \times (u-v) = u^2 - v^2$   
 ·44  $(u+r)^2 + (u-r)^2 = 2(u^2 + v^2)$  { LAGNY ParisM. a.1706 p.319 :  
 Dans tout parallelogramme la somme des quareez des deux diagonales est  
 égale à la somme des quareez des quatre côtez. }  
 ·45  $(u+v)^2 - (u-v)^2 = 4u \times v$   
 ·46  $(u+r+w)^2 + (u+r-w)^2 + (u+w-v)^2 + (v+w-u)^2 = 4(u^2 + v^2 + w^2)$   
 { LEGENDRE *Géom.* p.227 :  
 « ... dans tout parallépipède, la somme des carrés des quatre diagonales est égale à la somme des carrés des douze arêtes. » }  
 ·47  $(u+r+w)^2 + u^2 + r^2 + w^2 = (u+r)^2 + (v+w)^2 + (w+u)^2$   
 ·48  $(u-r)^2 + (r-w)^2 + (w-u)^2 + (u+r+w)^2 = 3(u^2 + r^2 + w^2)$   
 $a, b, c \varepsilon \text{pnt} \supset$   
 ·6  $(a-b) \times (a-c) = 0 \implies (a-b)^2 = (a-c)^2 + (b-c)^2$   
 { PYTHAGORAS; Cfr. Plutarchos *Symp.* viii c.4 }  
 { EUCLIDES I P47 P48 }  
 ·61  $(a-b)^2 = (a-c)^2 + (b-c)^2 - 2(a-c) \times (b-c)$   
 ·62  $(a-b)^2 = (a-c)^2 + (b-c)^2 + 2(a-c) \times (c-b)$   
 { EUCLIDES II P12 P13 }  
 ·63  $2[a-(b+c)/2]^2 = (a-b)^2 + (a-c)^2 - (b-c)^2/2$   
 { APOLLONIUS PERGÆUS voir P·9 }  
 Le vecteur  $a-(b+c)/2$  s'appelle " médiane " du triangle  $abc$ .  
 $a, b, c, d \varepsilon \text{pnt} \supset$   
 ·7  $(a-b) \times (c-d) + (b-c) \times (a-d) + (c-a) \times (b-d) = 0$   
 ·71  $(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-d)^2 + (d-a)^2 = (a-c)^2 + (b-d)^2 +$   
 $4[(a+c)/2 - (b+d)/2]^2$  {EULER PetrNC. a.1748 t.1 p.66 }



« Ἐὰν εἰς κύκλον τρίγωνον ἰσόπλευρον ἐγγραφεῖ, ἡ τοῦ τριγώνου  
κεντρὸς ἀνταμείβεται τοις ἀσπίσι ἐστὶ τῆς ἐκ τῆς κέντρος τῆς κύκλου. » {

- 6  $a, b, c, d \in \text{pnt} \cdot \text{mod}(a-b) = \text{mod}(a-c) = \text{mod}(a-d) = \text{mod}(b-c) = \text{mod}(b-d) = \text{mod}(c-d) = 1 \cdot \supset$   
 $\text{mod}[(a+b)/2 - (c+d)/2] = \sqrt{2}/2 \cdot$   
 $\text{mod}[(a+b+c)/3 - d] = \sqrt{2}/3 \cdot$   
 $\text{mod}[(a+b+c+d)/4 - a] = \sqrt{6}/4 \quad \{ \text{EUCLIDES XIII P13:}$   
*« ἡ τῆς σφαίρας διάμετρος δυνάμει ἡμιολία ἐστὶ τῆς πλεοναῶς τῆς*  
*πυραμίδος. »* }

λ \* 10. (vet |  $q_n$ ) § $q_n$  P11-14

\* 11.

- 1  $u \in \text{vet} \cdot x \in q \cdot \supset \cdot xu = v \} \lambda[(v \wedge \theta x)u] \wedge \lambda[(v \wedge x/\theta)u] \{ \quad \text{Df}$   
 ·2  $x \in q \cdot r \cdot u \in \text{vet} \cdot \supset \cdot xu \in \text{vet} \quad \text{Pp}$   
 ·3  $(q | r) \text{ P6} \cdot 5 \cdot 6, \text{ P7}, \text{ P8} \cdot 39$

*Note.* La P·1 définit le produit d'un nombre irrationnel par un vecteur.

La Pp·2, qui affirme l'existence de ce produit, cesse de valoir si l'on remplace les « vet » par les « r », bien que toutes les Pp précédentes soient satisfaites.

- \* 12·1  $i \in \text{vet} \cdot t0 \cdot \supset \cdot \exists \text{vet} \cdot (qi) \quad \text{Pp}$   
 ·2  $i \in \text{vet} \cdot t0 \cdot j \in \text{vet} \cdot (qi) \cdot \supset \cdot \exists \text{vet} \cdot (qi + qj) \quad \text{Pp}$   
 ·3  $i \in \text{vet} \cdot t0 \cdot j \in \text{vet} \cdot (qi) \cdot k \in \text{vet} \cdot (qi + qj) \cdot \supset \cdot \text{vet} = qi + qj + qk \text{ Pp}$

La Pp·1 dit qu'il existe des vecteurs non parallèles à un vecteur donné ; elle n'est pas satisfaite si l'on considère seulement les vecteurs appartenant à une droite fixe.

La Pp·2 dit qu'il existe des vecteurs non coplanaires avec deux vecteurs non parallèles donnés. Elle n'est pas satisfaite si l'on considère seulement les vecteurs d'un plan fixe.

La Pp·3 dit que l'espace que nous considérons a trois dimensions. Elle n'est pas satisfaite si l'on remplace les « vet » par des «  $q_i$  ».

Ces trois Pp, nécessaires dans quelques cas, nous sont moins intéressantes.

- 4 Hp·3  $\cdot x, y, z \in q \cdot xi + yj + zk = 0 \cdot \supset \cdot x = 0 \cdot y = 0 \cdot z = 0$   
 ·5 Hp·3  $\cdot x, y, z, x', y', z' \in q \cdot xi + yj + zk = x'i + y'j + z'k \cdot \supset \cdot$   
 $x = x' \cdot y = y' \cdot z = z'$

- 6 Hp·3  $\cdot o \in \text{pnt} \cdot \supset \cdot \text{pnt} = o + qi + qj + qk$

Les nombres  $x, y, z$  qui figurent dans les P·4·5 s'appellent « coordonnées du vecteur  $xi + yj + zk$  par rapport aux vecteurs fondamentaux  $i, j, k$  ». Ils s'appellent aussi « coordonnées du point  $o + xi + yj + zk$  par rapport à l'origine  $o$  et aux mêmes vecteurs. Dans les Hp de la P13 les coordonnées sont cartésiennes orthogonales.

Les quantités  $x, y, z, t$  sont les coordonnées barycentriques de  $xa + yb + zc + td$ , si  $a, b, c, d \in \text{pnt}$  ; en sont les projectives, si  $a, b, c, d$  sont des sommes de points.

\* 13.  $i, j, k \in \text{vet} \cdot i^2 = j^2 = k^2 = 1 \cdot i \times j = i \times k = j \times k = 0 \cdot \supset$ :

\*1  $u \in \text{vet} \cdot \supset \cdot u = (u \times i)i + (u \times j)j + (u \times k)k$

\*2  $x, y, z, x', y', z' \in \mathbb{Q} \cdot \supset \cdot (xi + yj + zk) \times (x'i + y'j + z'k) = x'x' + y'y' + z'z'$

\*3  $x, y, z \in \mathbb{Q} \cdot \supset \cdot \text{mod}(xi + yj + zk) = \sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)}$

\* 14\*1  $a, b, c \in \text{pnt} \cdot d \in a + \theta(c - a) \cdot c \in b + \theta(d - b) \cdot \supset$ .

$\text{mod}(c - b) + \text{mod}(c - c) \leq \text{mod}(a - b) + \text{mod}(a - c)$

{ EUCLIDES I P21 }

\*2  $a, b, c \in \text{pnt} \cdot m, n \in \mathbb{Q} \cdot \supset$ .

$[(m+n)a - (mb+nc)]^2 = m(m+n)(a-b)^2 + n(m+n)(a-c)^2 - mn(b-c)^2$   
 { STEWART a.1763 }

\*3  $a, b, c, d \in \text{pnt} \cdot m, n, p \in \mathbb{Q} \cdot \supset$ .

$[(m+n+p)a - (mb+nc+pd)]^2 = (m+n+p)[m(a-b)^2 + n(a-c)^2 + p(a-d)^2] - mn(b-c)^2 - mp(b-d)^2 - np(c-d)^2$

U \* 15.  $u \in \text{vet} \cdot \supset \cdot \supset \cdot Uu = u / \text{mod } u$  Df

\*1  $\text{mod } Uu = 1 \cdot U(-u) = -Uu \cdot u \in \mathbb{Q} \cdot \supset \cdot Uau = Uu$

Note. La fonction  $Uu$ , qu'on peut lire le vecteur unitaire dans la direction de  $u$ , a été considérée et désignée par ce signe, par Hamilton.

L'opération  $U$  correspond à l'opération "sign" sur les nombres.

$\text{cmp} \mid \text{cmp} \perp$  \* 16.  $u, r, v \in \text{vet} \cdot \text{mod } u = 1 \cdot \supset$ .

\*0  $(\text{cmp} \mid u)r = (u \times r)u$  = « composante parallèle à  $u$  de  $r$  » { Df

\*01  $(\text{cmp} \perp u)r = r - (\text{cmp} \mid u)r$  = « » normale à  $u$  de  $r$  » { Df

\*1  $(\text{cmp} \mid u)(r + v) = (\text{cmp} \mid u)r + (\text{cmp} \mid u)v$

\*11  $\text{---} \perp \text{---} \text{---} \perp \text{---} \text{---} \perp \text{---}$

\*2  $u, r \in \text{vet} \cdot u \cdot u = 0 \cdot \supset$ .

$(\text{cmp} \mid u)r = (\text{cmp} \mid Uu)r \cdot (\text{cmp} \perp u)r = (\text{cmp} \perp Uu)r$  Df

Lm lim \* 20.  $(\text{vet} \mid q_n) \S q_n$  P21-24 30

$(\text{pnt} \mid q_n) \text{---} \text{---} \text{---}$

\* 21.  $k \in \text{Cls}'q \cdot r \in \delta k \cdot u \in (\text{Cls}'\text{pnt})fk \cdot \supset$ .

$\lim(a, k, r) = \text{pnt} \cap a \S \lim[\lim(\text{mod}(a - rz) \mid z, k, r)] = 0$  Df

Ex. rectaTang P51 P52

D S \* 22.  $(\text{pnt} \mid q_n) \S q_n$  P31

$(\text{vet} \mid q_n) \text{---} \text{---} \text{---} 31-34, 40, 41.$

\* 23\*1  $u \in (\text{vet} \cdot \supset) \text{Fq} \cdot Du \in \text{vetFq} \cdot \supset \cdot D \text{mod } u = Uu \times Du$

\*2  $D Uu = [(\text{cmp} \perp u)Du] / \text{mod } u$

Dtrm \* 29.

\*1  $u, r \in \text{vct f } 1 \cdots 4 \rightarrow \text{Dtrm}[u, \times v, |(r, s), 1 \cdots 4 : 1 \cdots 4] = 0$

Subst \* 30.  $(\text{vct } [q_n]) \S \text{Subst P1-2}$

U cos \* 31.

$u, v \in \text{vct} . \text{mod } u = \text{mod } v = 1 \rightarrow \cos(u, v) = u \times v \quad \text{Df}$

$u, v \in \text{vct} \rightarrow \cos(u, v) = \cos(Uu, Uv) = (Uu) \times (Uv) \quad \text{Df}$

\*2  $\cos(u, v) = \cos(v, u) . \cos(-u, v) = \cos(u, -v) = -\cos(u, v) .$   
 $\cos(-u, -v) = \cos(u, v) . -1 \leq \cos(u, v) \leq 1$

\*3  $u \times v = \text{mod } u \text{ mod } v \cos(u, v)$

\*4  $\cos(u, v) = 1 \Rightarrow v \in Qu : \cos(u, v) = -1 \Rightarrow v \in -Qu$

$\text{ang} = (\text{angle})$

\* 32.  $u, v \in \text{vct} \rightarrow \cos^{-1}[\cos(u, v)] \quad \text{Df}$

\*1  $\text{ang}(u, v) \in \Theta\pi$

\*11  $\text{ang}(u, v) = \text{ang}(v, u) = \text{ang}(-u, -v) \quad \{\text{EUCLIDES I P15} \}$

\*12  $\text{ang}(u, v) = \pi - \text{ang}(u, -v) = \text{ang}(Uu, Uv) \quad \{\text{» 13} \}$

\*13  $u + v \neq 0 \rightarrow \text{ang}(u, v) = \text{ang}(u, u+v) + \text{ang}(u+v, v)$

\*14  $u, v, w \in \text{vct} \rightarrow \text{ang}(u, w) \leq \text{ang}(u, v) + \text{ang}(v, w)$

$\text{ang}(u, v) + \text{ang}(v, w) + \text{ang}(w, u) \leq 2\pi \quad \{\text{EUCLIDES XI P20, 21} \}$

\*2  $\cos(u, v) = \cos \text{ang}(u, v) \quad *3 \quad \sin(u, v) = \sin \text{ang}(u, v) \quad \text{Df}$

\*4  $\sin(u, v) = 0 \Rightarrow u \perp v \quad *5 \quad \text{mod}(\text{cmp } \perp u)v = \text{mod } v \sin(u, v)$

\* 33.  $p, q, r \in \text{pnt} . p = q . p = r . q = r . a = \text{mod}(q-r) . b =$   
 $\text{mod}(r-p) . c = \text{mod}(p-q) . a' = \text{ang}(p-q, p-r) . b' = \text{ang}(q-r,$   
 $q-p) . c' = \text{ang}(r-p, r-q) . s = (a+b+c)/2 \rightarrow$

\*1  $a = b \Rightarrow a' = b' \quad \{\text{EUCLIDES I P 5, 6} \}$

\*2  $a < b \Rightarrow a' < b' \quad \{\text{» 18, 19} \}$

\*3  $a' + b' + c' = \pi \quad \{\text{EUCLIDES I P32} \}$

\*4  $a = b \cos c' + c \cos b' \quad *5 \quad a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos a' \quad [= \text{P8.61}]$

\*6  $\sin a' / a = \sin b' / b = \sin c' / c$

$\{\text{NASIR EDDIN ATTÛSI a.1260 l.III} \}$

[ Hp  $\rightarrow p-r = (p-q) + (q-r) \quad (1)$

Hp . (1)  $\rightarrow [\text{cmp } \perp (p-q)](p-r) = [\text{cmp } \perp (p-q)](q-r) \quad (2)$

Hp . (2) . P32.5  $\rightarrow \text{P} \}$

\*61  $bc \sin a' = 2\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \quad \{\text{HERON a.-150 p.286} \}$   
 $(bc \sin a')/2$  est l'aire du triangle  $pqr$ .

- 7  $\sin(a' 2) = \sqrt{[(s-b)(s-c) (bc)]} \quad \cos(a' 2) = \sqrt{[s(s-a) (bc)]}$   
 $\operatorname{tg}(a' 2) = \sqrt{[(s-b)(s-c) [s(s-a)]]}$
- 8  $\operatorname{tg}[(a'-b') 2] - \operatorname{tg}(c' 2) = (a-b) (a+b)$

\* 34.  $uv \in \text{vct} \rightarrow 0, v \in \text{vct} \rightarrow qu, uv \in \text{vct} \rightarrow (qu + qc) \rightarrow \supset$ .

- 0  $\operatorname{ang}(uv, uv) = \operatorname{ang}[(\operatorname{emp}_{\perp} u)v, (\operatorname{emp}_{\perp} u)v] \quad \text{Df}$   
 $\ast = (\text{angle dièdre déterminé par les plans } uv \text{ et } uv)$

$a = \operatorname{ang}(v, v), b = \operatorname{ang}(v, u), c = \operatorname{ang}(u, v), a' = \operatorname{ang}(u, v, v), b' = \operatorname{ang}(v, v, u), c' = \operatorname{ang}(uv, u, v), s = (a+b+c) 2, s' = (a'+b'+c') 2 \rightarrow \supset$ .

- 01  $a < b+c, a+b+c < 2\pi \quad \{ = \text{P32.14} \}$

- 02  $a' > b'+c'-\pi, \pi < a'+b'+c' < 3\pi$

- 1  $\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos a'$

$\{ \cos v, w = Uv \wedge Uw$   
 $= [\operatorname{emp}_{\perp} u \wedge Uv + \operatorname{emp}_{\perp} u \wedge Uv] \wedge [\operatorname{emp}_{\perp} u \wedge Uw + \operatorname{emp}_{\perp} u \wedge Uw]$   
 $= [\operatorname{emp}_{\perp} u \wedge Uv] \wedge [\operatorname{emp}_{\perp} u \wedge Uv] + [\operatorname{emp}_{\perp} u \wedge Uv] \wedge [\operatorname{emp}_{\perp} u \wedge Uw] \rightarrow \supset. P \}$   
 $\}$  AL BATTĀNĪ a.929; voir BD. a.1892 p.147  
 $\}$  REGIOMONTANUS a.1533 p.127 :

In omni triangulo sphaerali ex arcibus circularum magnorum constante, proportio sinus versi anguli cuiuslibet  $[1 - \cos a']$  ad differentiam duorum sinuum versorum, quorum unus est lateris eum angulum subtendentis  $[1 - \cos a]$ , alius vero differentiae duorum arcuum ipsi angulo circumiacentium  $[1 - \cos b \cos c + \sin b \sin c]$  est tanquam proportio quadrati sinus recti totius  $[1]$  ad id, quod sub sinibus arcuum dicto angulo circumpositorum continetur rectangulum  $[\sin b \sin c]$ . :

- 2  $\sin a' / \sin a = \sin b' / \sin b = \sin c' / \sin c$

$\}$  ABŪ' LŴÉFA a.940-998; voir *Journal Asiatique* a.1892  
s.8 t.19 p.423 :

$\}$  REGIOMONTANUS a.1533 p.95 :

« In omni triangulo ... sinus laterum ad sinus angulorum eis oppositorum eandem habent proportionem » . :

- 3  $\cos a' = -\cos b' \cos c' + \sin b' \sin c' \cos a$

- 4  $\cos b \cos c' = \sin b \operatorname{tga} - \sin c' \operatorname{tga}'$

- 5  $\sin b \sin c \sin a' = 2 \sqrt{[\sin s \sin(s-a) \sin(s-b) \sin(s-c)]}$

- 6  $\sin(a' 2) = \sqrt{[\sin(s-b) \sin(s-c) [\sin b \sin c]]}$  NEPER a.1614 p.48  
 $\cos(a' 2) = \sqrt{[\sin s \sin(s-a) [\sin b \sin c]]}$  » » »  
 $\sin(a 2) = \sqrt{[-\cos s' \cos(s'-a')] [\sin b' \sin c']}$   
 $\cos(a 2) = \sqrt{[\cos(s'-b') \cos(s'-c')] [\sin b' \sin c']}$

- 7  $\sin[(a'-b')/2] \sin(c/2) = \sin[(a-b)/2] \cos(c'/2)$   
 $\cos[(a'-b')/2] \sin(c/2) = \sin[(a+b)/2] \sin(c'/2)$   
 $\sin[(a'+b')/2] \cos(c/2) = \cos[(a-b)/2] \cos(c'/2)$   
 $\cos[(a'+b')/2] \cos(c/2) = \cos[(a-b)/2] \sin(c'/2)$   
 } DELAMBRE *Connaiss. des temps*, a.1807 {
- 8  $\text{tng}[(a'+b')/2] = \text{tng}(c/2) \cos[(a-b)/2] \cos[(a+b)/2]$   
 $\text{tng}[(a'-b')/2] = \text{ » } \sin \text{ » } \sin \text{ » }$   
 } NEPER a.1614 p.48 {
- \* 35·1  $a, b, c \varepsilon \text{pnt} . \text{mod}(a-b) = \text{mod}(a-c) = \text{mod}(b-c) = 1 \quad \bigcup.$   
 $\cos(b-a, c-a) = \sin[a-b, a-(b+c)/2] = \sqrt{2}$   
 $\sin \text{ » } = \cos \text{ » } = \sqrt{3}/2$
- 2  $a, b, c, d \varepsilon \text{pnt} . \text{mod}(a-b) = \text{mod}(a-c) = \text{mod}(a-d) =$   
 $\text{mod}(b-c) = \text{mod}(b-d) = \text{mod}(c-d) = 1 \quad \bigcup.$   
 $\cos[(a+b)/2 - c, (a+b)/2 - d] = \sqrt{3}$   
 $\sin \text{ » } \text{ » } \text{ » } \text{ » } = 2\sqrt{2}/3$   
 $\cos[(a+b)/2 - c, (a+b)/2 - (c+d)/2] = \sqrt{2/3}$   
 $\sin \text{ » } \text{ » } \text{ » } \text{ » } = \sqrt{3}$
- \* 39. recta plan
- 1  $a \varepsilon \text{pnt} . u \varepsilon \text{vet} \rightarrow 0 \quad \bigcup. \text{recta}(a, u) = a + qu \quad \text{Df}$
- 2  $a \varepsilon \text{pnt} . b \varepsilon \text{pnt} \rightarrow a \quad \bigcup. \text{recta}(a, b) = \text{recta}(a, b-a) \quad \text{Df}$   
 $= a + q(b-a) \quad \text{Dfp}$
- 3  $a \varepsilon \text{pnt} . u \varepsilon \text{vet} . r \varepsilon \text{vet} \rightarrow qu \quad \bigcup. \text{plan}(a, u, c) = a + qu + qr \quad \text{Df}$
- 4  $a \varepsilon \text{pnt} . b \varepsilon \text{pnt} \rightarrow a . c \varepsilon \text{pnt} \rightarrow \text{recta}(a, b) \quad \bigcup.$   
 $\text{plan}(a, b, c) = \text{plan}(a, b-a, c-a) \quad \text{Df}$
- 5 Hp·4  $\bigcup. \text{plan}[\text{recta}(a, b), c] = \text{plan}(a, b, c) \quad \text{Df}$   
 Ex. §rectaTangP2.

Nous donnons ici les définitions de la droite (recta) déterminée par un point et un vecteur ou par deux points, et du plan déterminé par un point et deux vecteurs, ou par trois points.

#### \* 40.

Nous donnons ici les définitions symboliques de plusieurs mots géométriques, sans nous prononcer sur l'utilité d'introduire des symboles pour indiquer ces idées dans un développement de la Géométrie symbolique.

- $u, v, w \varepsilon \text{vet} \rightarrow 0 . a \varepsilon \text{pnt} . b, c \varepsilon \text{pnt} \rightarrow a . r \varepsilon \{ . k \varepsilon \text{Cls'pnt} \quad \bigcup.$   
 $qu = (\text{vecteur parallèle à } u) = (\text{point à l'infini de } u).$   
 $Qu = (\text{vecteur parallèle et de même sens que } u).$

- $a+Q(b-a) =$  (rayon d'origine  $a$  et passant par  $b$ ).  
 $a+\Theta(b-a) =$  (le même segment avec les extrémités).  
 $a+\theta(b-a) =$  (segment de droite limitée par  $a$  et  $b$ , ces point exclus).  
 $=$  (droite à l'infini qui contient  $qa$  et  $qb$ ).  
 2  $qa+qr =$  (vecteur coplanaire avec  $a$  et  $r$ ).  
 $a+Qu+Qr =$  (angle de sommet  $a$  et de côtés  $au$  et  $ar$ ).  
 (son supplémentaire  $= a+Qu-Qr$ )  
 (son opposé  $= a-Qu-Qr$ )  
 3  $a-Qu+Qr-Qr =$  (angle dièdre; l'arête est  $a+qa$ , les faces sont :  
 $a+qu-Qr$ ,  $a-qu-Qr$ ).  
 $a+Qu+Qr-Qr =$  (angle trièdre;  $a$  est le sommet,  $a+Qu$ ,  $a+Qr$ , ...  
 sont les arêtes, et  $a+Qu+Qr$ ,  $a+Qu+Qr$ , ... sont les faces).  
 $a+Qu+Qr =$  (parallélogramme).  
 $a+Qu+Qr+Qr =$  (parallélépipède).  
 $k+q =$  cylindre qui projette selon la direction  $u$  la figure  $k$ .  
 $a+q(k-a) =$  (cône qui projette  $k$  du point  $a$ ).  
 4 l'angle  $(u,v)$  est droit  $= (u \times v = 0)$   
 » aigu  $= ( > 0 )$   
 » obtus  $= ( < 0 )$   
 5  $\text{pnt} \cap x \mathfrak{E} [x-a \times u = 0] =$  (plan passant par  $a$  et normal à  $u$ ).  
 6  $Ua+Ur =$  (vecteur dirigé selon la bisectrice des vecteurs  $u$  et  $v$ ).  
 $a+q[U(b-a)+U(c-a)] =$  (bisectrice de l'angle  $bac$ ).  
 $u \times Uv =$  (projection de  $u$  sur  $v$ , comme nombre).  
 $(u \times Uv)Uv =$  (», », comme vecteur).  
 7  $\text{pnt} \cap x \mathfrak{E} [\text{mod } x-a] = r] =$  (sphère de centre  $a$  et de rayon  $r$ ).  
 $\text{pnt} \cap x \mathfrak{E} [(x-a)^2 = r^2] =$  (idem).

Transl \* 41.  $u, r \in \text{vet}, p \in \text{pnt} \rightarrow$

0  $(\text{Transl } u)p = p+u \} =$  « le point  $p$ , après la translation  
 représentée par le vecteur  $u$  ». { Df

1  $(\text{Transl } r)(\text{Transl } u) = \text{Transl}(u+r)$

2  $m \in \mathbb{N}_1 \rightarrow (\text{Transl } u)^m = \text{Transl } mu$

Sym \* 42.  $a, b, c, p \in \text{pnt}, u \in \text{vet} \rightarrow$

0  $(\text{Sym } c)p = c+(c-p) \} =$  « symétrique, par rapport à  $c$ , de  $p$  » {

1  $(\text{Sym } c)^2 p = p$  2  $(\text{Sym } b)(\text{Sym } a) = \text{Transl } 2(b-a)$

3  $\text{Transl } u = [\text{Sym}(c+u/2)](\text{Sym } c)$

4  $(\text{Transl } u)(\text{Sym } c) = \text{Sym}(c+u/2)$

5  $(\text{Sym } c)(\text{Transl } u) = \text{Sym}(c-u/2)$

\* 43.  $u, r, w \in \text{vet}, u \neq 0 \rightarrow$

0  $(\text{Sym } u)r = (\text{emp} \parallel u)r - (\text{emp} \perp u)r$  Df

1  $(\text{Sym } u)^2 r = r$

Homot \* 44.  $a, b, c, p \in \text{pnt} . h, k \in \mathbb{Q} . u \in \text{vct} . \supset$ .

·0  $\text{Homot}(c, k)p = c + k(p - c) \} = \text{« le correspondant de } p \text{ dans l'Homothétie de centre } c \text{ et de rapport } k \text{ »}$  Df

·1  $\text{Homot}(c, 1)p = p . \text{Homot}(c, -1)p = (\text{Sym}c)p$

·2  $\text{Homot}(c, k)b - \text{Homot}(c, k)a = k(b - a)$

·3  $k \neq 1 . \supset . \text{Homot}(c, k)\text{Transl}u = \text{Homot}[c + uk/(1 - k), k]$

·4  $hk \neq 1 . \supset .$

$[\text{Homot}(b, k)][\text{Homot}(a, h)] = \text{Homot}[a + (b - a)(1 - k)/(1 - hk), hk]$

·5  $k \neq 0 . \supset . [\text{Homot}(b, /k)][\text{Homot}(a, k)] = \text{Transl}(b - a)(1 - /k)$

·6  $m \in \mathbb{N}_1 . \supset . [\text{Homot}(c, k)]^m = \text{Homot}(c, k^m)$

*Note.* Les P41-4 contiennent les définitions et les propriétés principales des opérations appelées translation, symétrie, homothétie. Elles n'ont pas d'application dans la suite.

Rotor Rotat \* 45.

·0  $\text{Rotor} = i\exists \exists (a, b) \exists [a, b \in \text{vct} . \text{mod}a = \text{mod}b = 1 . a \times b = 0 . i = (b, -a)/(a, b)]$  Df

·1  $i \in \text{Rotor} . \supset . i^2 = -1$

$a, b \in \text{vct} . \text{mod}a = \text{mod}b = 1 . a \times b = 0 . i = (b, -a)/(a, b) . \supset .$

·21  $i \in \text{Rotor} \quad \cdot 22 \ i \in \text{Subst}(qa + qb) \quad \cdot 23 \ \text{Variabi}i = qa + qb$

$o \in \text{pnt} . p, q, r \in o + qa + qb . t, t' \in \mathbb{Q} . m \in \mathbb{N}_1 . u \in qa + qb . \supset .$

·3  $\text{Rotat}(o, i, t)p = o + e^{it}(p - o)$  Df  
 $= \text{« le point } p \text{ après la rotation de } t \text{ radians autour du point } o \text{ dans le plan de la variabilité de } i \text{ »} .$

·31  $\text{Rotat}(o, i, t') \text{Rotat}(o, i, t) = \text{Rotat}(o, i, t + t')$

·32  $\text{Rotat}(o, i, t)^m = \text{Rotat}(o, i, mt)$

·33  $\text{Rotat}(q, i, -t) \text{Rotat}(p, i, t) = \text{Transl}[(1 - e^{it})(q - p)]$

·34  $\text{Rotat}(q, i, t) = \text{Transl}[(1 - e^{it})(q - p)] \text{Rotat}(p, i, t)$

·35  $e^{it} \neq 1 . \supset . \text{Transl}u \text{Rotat}(p, i, t) = \text{Rotat}[p + u/(1 - e^{it}), i, t]$

·36  $\text{Rotat}(p, i, t) \text{Transl}u = \text{Rotat}[p - u/(1 - e^{it}), i, t]$

·37  $e^{i(t+t')} \neq 1 . \supset . \text{Rotat}(q, i, t') \text{Rotat}(p, i, t) = \text{Rotat}[p + (q - p)(1 - e^{it})/(1 - e^{i(t+t')}), i, t + t']$

*Note.* Nous appelons « Rotor » toute transformation linéaire qui à deux vecteurs  $a$  et  $b$  unitaires et perpendiculaires fait correspondre les vecteurs  $b$  et  $-a$ . Et nous indiquons par  $\text{Rotat}(o, i, t)p$ , où  $o$  est un point,  $i$  un Rotor,





planOscul \* 52.  $\text{HpP51} \supset$ .

·0  $\text{planOscul}(p, t) = \lim_{h \rightarrow 0} \text{plan}[\text{rectaTang}(p, t), p(t+h)]/h, q, 0 \} \text{ Df}$

·1  $Dpt \in \text{vet} \rightarrow 0, D^2pt \in \text{vet} \rightarrow q Dpt \supset$ .

$\text{planOscul}(p, t) = \text{plan}(pt, Dpt, D^2pt)$

[ P·0  $\supset$ .  $\text{planOscul}(p, t) = \lim_{h \rightarrow 0} \text{plan}[\text{rectaTang}(p, t), p(t+h)]/h, q, 0$ ;  
P51·1, 39·5  $\supset$ .  $\text{planOscul}(p, t) = \text{plan}(pt, Dpt, D^2pt)$  ]

P39·4  $\supset$ .  $\text{planOscul}(p, t) = \text{plan}(pt, Dpt, D^2pt)$ ,  $[p(t+h) - pt - hDpt]/h^2 \rightarrow 0$   
§D 8  $\supset$ .  $\text{planOscul}(p, t) = \text{plan}(pt, Dpt, D^2pt)$  ]

·2  $m, n \in \mathbb{N}_1, Dpt = D^2pt = \dots = D^{m-1}pt = 0, D^mpt \in \text{vet} \rightarrow 0, D^{m+1}pt, \dots, D^{m+n-1}pt \in q \times D^mpt, D^{m+n}pt \in \text{vet} \rightarrow q \times D^mpt$ .  
 $\supset$ .  $\text{planOscul}(p, t) = \text{plan}(pt, D^mpt, D^{m+n}pt)$

Arc \* 53.  $a, b \in q, a < b, p \in \text{pnt F } a \rightarrow b \supset$ .

·0  $\text{Arc}(p, a \rightarrow b) = \{ x \in \mathbb{R}^n(n, t) \mid n \in \mathbb{N}_1, t \in (a \rightarrow b) \text{ f } 0 \dots n \text{ cres}, t_0 = a, t_n = b, x = \sum [\text{mod}(p(t_{r+1}) - p(t_r)) / r, 0 \dots (n-1)] \} \text{ Df}$

·1  $Dp \in (\text{vet F } a \rightarrow b) \text{ cont} \supset \text{Arc}(p, a \rightarrow b) = S(\text{mod } Dp, a \rightarrow b)$

Norm curvatura

\* 54.  $p \in \text{pnt F } q, t \in q, Dpt \in \text{vet} \rightarrow 0, D^2pt \in \text{vet} \rightarrow q Dpt \supset$ .

$\text{Norm}(p, t) = \text{recta}[pt, (\text{cmp } \perp Dpt)(D^2pt)] \text{ Df}$

$\text{Norm}(p, t) = \text{recta}[pt, D(\text{UD}pt)]$

$\text{curvatura}(p, t) = \text{mod } D(\text{UD}pt) / \text{mod } Dpt \text{ Df}$

Nous donnons ici les définitions de

$\text{rectaTang}(p, t) =$  droite tangente à la ligne décrite par  $p$ , dans le point de paramètre  $t$ ,

$\text{planOscul}(p, t) =$  plan osculateur id. id.,

$\text{Norm}(p, t) =$  normale principale id. id.,

$\text{Arc}(p, a \rightarrow b) =$  la longueur de l'arc décrit par  $p$ , pour les valeurs de  $a$  à  $b$  de la variable.

Curvatura = courbure

et les théorèmes pour les trouver.

Le vecteur  $Dpt$ , si la variable  $t$  est le temps, s'appelle « vitesse du point  $p$  ».  $D^2pt$  en est l'accélération. Si le point  $p$  a une masse, ou coefficient numérique  $m$ ,  $mDpt$  est la « quantité de mouvement »,  $mD^2pt =$  « force »,  $mDpt^2/2 =$  « force vive, ou énergie cinétique ».

$\Gamma$  = paramètre différentiel.

\* 61.  $k \in \text{Cls'pnt} \cdot k \supset \delta k \cdot p \in k \cdot u, v \in \text{qfk} \cdot \supset$ .

•0  $\Gamma(u, k, p) =$   
 $\lim_{v \in \text{vct} \wedge v \neq 0} [(uq - up) - (q - p) \times v] \bmod (q - p) \mid q, k, p \} = 0 \}$  Df  
 = « paramètre différentiel de  $u$ , dans le champ  $k$ , pour le point  $p$  ».

•1  $up = \max u \cdot k \cdot \mid (u, k, p) \in \text{vct} \cdot \supset \cdot \Gamma(u, k, p) = 0$

•2  $l \in (\text{Int} k) F \Theta \cdot l \in \Theta \cdot Dlt \cdot \mid (u, k, lt) \in \text{vct} \cdot \supset$ .

$D(ul, \Theta, t) = \Gamma(u, k, lt) \times Dlt$

•3 Hp P.2  $\cdot ult = \max ul \cdot \Theta \cdot \supset \cdot \Gamma(u, k, lt) \times Dlt = 0$

•4  $\Gamma(u + v, k, p) = \Gamma(u, k, p) + \Gamma(v, k, p)$

$u, p \in \text{pnt} \cdot m \in 2 + N_0 \cdot \supset$ .

•5  $\Gamma[(p - a)^2 \mid p, \text{pnt}, p] = 2(p - a)$

•6  $\Gamma[\text{mod}(p - a) \mid p, \text{pnt}, a, p] = U(p - a)$

•7  $\Gamma[\text{mod}(p - a)]^m \mid p, \text{pnt}, p \} = m [\text{mod}(p - a)]^{m-1} U(p - a)$

Hamilton a introduit cet opérateur  $\Gamma$  dans ses *Lectures on Quaternions*, Dublin a.1853, p.610.

Lamé (JdM. a.1840 t.5 p.316) avait appelé « paramètre différentiel de premier ordre de la fonction  $u$  » le  $\text{mod} p(u, k, p)$ .

Les P.2-3 donnent la règle, énoncée par Leibniz, a.1693 t.6 p.233, pour trouver la normale au lieu des points pour lesquels est constante la somme des distances à plusieurs points fixes.

## TABLE DES SIGNES.

Cette table contient les symboles et les abréviations qu'on rencontre dans cette publication, ordonnés selon la forme typographique.

<i>Signes de forme spéciale.</i>		$/$ = divisé par §24 P1·0 7·0 32·7 §Q P30·0 §Subst P5·2·5
		$\uparrow$ = élevé §25 P1·0 P5·0 P11 P21 §Q P41·0 P52 P60
$\cdot$ ( ) [ ] { }	§1P1·2	$\sqrt{\phantom{x}}$ = racine §Q P53
« système de variables »	§1P1·6	$\sqrt{*}$ = racine générale §q' P4
,	§1P4·0 . Voir ;	$a \cdots b$ = les entiers de $a$ à $b$ §31
$\doteq$ = avec	§8	$\dots$ = etc. §Σ P1·11
$\supset$ « est contenu, on déduit »	§1P1·7	$!$ = factorielle §35
$=$ « est égal »	§1P1·9	$\infty$ = infini §61 P4
$\wedge$ = et	§1P1·8	$\vdash \dashv$ « intervalle » §Q P19
$\vee$ = ou	§2P1·0 P4·0	$f$ voir S.
$\Lambda$ = classe nulle	§3	
$-$ = non	§4P1·0·01·2·3	
« inverse » ou « à la place de »	§11	
' ' = de	§12	<i>Lettres grecques.</i>
0 1 2 3 ..... 8 9 X	§+P2	$\beta$ = la partie fractionnaire de §42
$+$ = plus	§20 P1·3	$\delta$ = ensemble dérivé §66
Df de $a+b$ , si $a, b \in N_0$	P3·1·2	$\nabla$ = paramètre différentiel §vet P71
si $a, b \in n, R, r, Q, q$	§- P4·0	$\varepsilon$ = est un §1 P1·4
	§/ P12·0 P32·2 §Q P3·0	$z$ = qui §1 P1·5
$a, b \in \text{Cls}' N_0$	§+ P7	$\vartheta$ = fraction propre §60
nombres complexes	§q <sub>n</sub> P1·1	$\theta, \Theta$ = intervalle de 0 à 1 §QP2
$a \in \text{pnt} . b \in \text{vet}$	§vet P3·2	$\iota$ = égal §6
$a, b \in \text{vet}, \text{pnt}$	§vet P3·3 P7	$\imath$ = le §7
$> < \equiv \leq$	§21 P1·0 P2·0 §- P7·0	$\lambda$ = limites de §65P1·0
	§1' P1·5 P2·0·2 §Q P17·0	$\mathcal{A}$ = limites généralisées §65P3
$-$ = moins	§22 P1·0 P2·1 P5·0	$\pi$ §84
	§/ P22·0 P32·3 §Q P11·0	$\Pi$ = produit §34
	§q <sub>n</sub> P1·3 §vet P2·0 P3·4	$\Sigma$ = somme §33P1·0·1, P21
$\pm$	§Q P56·0	§lim P10·0, P11·1·2·3
$\times$ = multiplié par	§23 P1·0 2 6·0	$\Phi$ = indicateur §53
	§/ P5·0 32·6 §Q P21·0 §q <sub>n</sub> P1·4	
	§vet P5·0 P6·4 P8 P11·1	

## Lettres latines.

a. = an		Distrib = distributive	
Altern = alterner	§vetP2:4	Distrib $\varepsilon \cap$	§1P5:4
ang = angle	§vetP3:2	» $\cap \cap$	§1P5:7
Are	§vetP5:3	» $\supset \cap$	§1P7:3
Assoc = associative	§ $\supset$ P6:3	» $\varepsilon \cap$	§1P8:2
Assoc $\cap$		» $\cap \cap$	§ $\cap$ P3:1
» $\cap$	§ $\cap$ P2:3	» $\varepsilon \cap$	§ $\cap$ P4:0
» $+$	§ $+$ P5:3 §vet 3:35	» $\varepsilon \cap$	§ $\cap$ P4:1
» $\times$	§ $\times$ P1:5 » 5:5	» $\cap \cap$	§ $\cap$ P2:62
B = nombres de Bernoulli	§86	» $\mathfrak{H} \cap$	§ $\mathfrak{H}$ P3:1
C ou Cmb = combinaison	§35P2	» $! \cap$	§ $!$ P:2
C = constante d'Euler	§78	» $\cdot \cap$	§ $\cdot$ P1:5
Chf = chiffre des unités	§43	» $\times, +$	§ $\times$ 1:3
Cls = Classe	§1P1:3	» $\mathbb{N}, \times$	§vet 5:2:3, 8:3
Cmp = composer	§1P3:2 P5:4	» $+, \dots$	§ $\dots$ 3
cmp   = composante parallèle	§vetP16	» $\lim, +$	§lim 4:2
cmp $\perp$ = composante normale	»	» $\cdot, \times$	§lim 6:2
Comm = commutativité		» $\mathbb{N}$	§lim 8:4
d'une opération	§1 P6:2	dt = dénominateur	§46
Comm $\cap$	»	Dtrm = déterminant	§81
» $\cap$	§ $\cap$ P2:2	Dvr ou D = le plus grand commun	
» $+$	§ $+$ P5:5 §vet 3:34	diviseur	§44 P1:0, P3:0, P4:0
» $\times$	§ $\times$ P1:4 » 8:1	e	§76
de deux opérations	§ $\cap$ P1:5	E = entier de	§42
Comm $\varepsilon, -$		$\mathfrak{H}$ = existent	§5
» $\lim, -$	§lim P5:2	Elim = éliminer	§ $\mathfrak{H}$ P2:1
» $/$	» 7:2	Ex. = exemple	
» $\Sigma$	» 9:2	Export = exporter	§1 P3:4, P9:3
» $\Sigma, S$	§ $\Sigma$ P12:2	f, j = fonction	§10
» $\Sigma, S$	» 11:1	F = fonction définie	§14
» D, S	» 20:5	Homot = homothétie	§91P44
conj = conjugué	§q' P3:0	Hyp ou Hp = Hypothèse	§1P1:7a
cont = fonction continue	§73	i = unité imaginaire	§83
cos, cos <sup>-1</sup> = cosinus, anticossinus		idem = identité	§13
Voir sin		imag = coefficient de l'unité ima-	
eres, eres <sub>0</sub> = fonction croissante	§70	ginaire	§q' P3:0
D = dérivée	§74	Import = importer	§1P3:4
decr = fonction décroissante	§70	Induct = loi d'induction	§ $+$ P4:3
Dem ou Dm = démonstration	§1P3	infin = un infini	§Num
Df = définition	§1P2	l' = limite supérieure	§61P1:0 P2:0
Dfp = définition possible	§1P2	l <sub>-</sub> = limite inférieure	Voir l'

lin = fonction linéaire	§82	qn = nombre complexe d'ordre $n$	§80
Lm = Classe limite	§71 P1·0	q' = nombre imaginaire	§83
lim = la limite	§72 P1·0	quaternio	§vetP46
	§qn P24 §vet P20	quot = le quotient de	§41
Log = logarithme	§63	R = nombre rationnel positif	§/P3
log = logarithme dans la base $e$	§77	R <sub>0</sub> = id. id. id. ou nul	§/P31·2
log* = logarithme général	§πP5·0	r = nombre rationnel	§/P31·0
max = le maximum des	§52	rep = correspondance réciproque	§13
Med = moyen	§64	real = partie réelle d'un q'	§q'P3·0
min = le minimum des	Voir max	recta = droite	§vetP39
mlt ou m = le plus petit multiple commun	§45P1·0 P2·0	rectaTang	§vetP51
mod = module	§36 §Q P80 §qn P3	rest = le rest de	§41
	§SubstP3 §vetP9	Rotor, Rotat	§vetP45
mp = la plus grande puissance	§52	S = intégrale	§75P1·0
N <sub>0</sub> = nombre	§+ P1·2		P10·1·2·3·4·6·7·8, §qn P42
N <sub>1</sub> = nombre positif	§+P8	S' = intégrale par excès	§SP1·2
n = nombre entier	§-P3	S, = intégrale par défaut	§SP1·3
Norm = droite normale	§vetP54	Sb	Voir Subst
Np = nombre premier	§51	sgn = le signe de	§36
Nprf = nombre parfait	§54		§DtrmP1·0 §vetP15
nt = le numérateur de	§46	Simplif = simplifier	§1P3·6
Num = le nombre des	§32	sin = sinus	§85P1·0
Oper = opérer par		sin <sup>-1</sup> = antisinus	§sinP3
Oper α	§1P5·5	sim = correspondance semblable	§13
Oper ε	§1 P4·1	Sb, Subst = Substitution	§82
Oper z	»	Syll = syllogisme	§1P3·1 4·4
Oper ∪	§∪P1·5	Sym = symétrique de	§vetP42 P43
Oper ∩	§∩P1·21	t. = tome	
P = proposition		Ths = thèse	
Pp = proposition primitive	§1P3	tng, tng <sup>-1</sup>	§sinP2 P3
p. = page		Transl = translation	§vetP41
plan	§vetP39	Transp = transposer	§-P2·3·4
planOscul	§vetP52		P3·7·71, P4·2
pnt = point	§91	U = unité de	§vetP15
q = quantité positive	§62	unit = unité complexe	§qn P2
Q <sub>0</sub> = id. id. ou nulle	§QP2·0	Variab = variabilité d'une fonction	
q = quantité	§QP12		§14
		vct = vecteur	§91

## VOCABULAIRE MATHÉMATIQUE

Le nombre des noms adoptés par les mathématiciens s'est accru pendant les siècles. Il était de 1900 environ dans Archimedes, et arrive à 17000 dans le « Vocabulaire » publié par F. Müller en 1900, sans compter les noms appartenant à la Logique.

Nous exprimons ici en symboles la valeur de plusieurs de ces mots, on indiquons la place où l'on trouvera cette expression. Dans un développement successif du Formulaire on pourra, peut-être, ériger en symboles quelques uns de ces mots; et alors l'expression symbolique que nous en donnons servira comme Df. Mais la plus grande partie doit être supprimée de l'enseignement.

Abscissa v. *coordinata*

Absolu (nombre) =  $N_1$ , R, Q

» (valeur) = mod

» convergence v. série

Absurdum =  $\Delta$

Accélération §vet 54

Accroissement de  $f(x) = f(x+h) - f(x)$

Acutus = aigu; v. angle

Additio = opération  $+$

Addition logique = opération  $\cup$

Æquatio = équation

Aire du triangle §vet 33-61

Alternando §R 4 §vet 2-4

Analogies de Neper §vet 34-8

Analyse indéterminée §Dvt 2-3-4

Angulus figure = *γωνία* §vet 40-5

» (nombre) = ang

Antécédent d'une raison  $a/b = a$

Applicata = ordonnée.

Αποτομή = residuum binomiale (Kepler) §Q54-4

Arc sin =  $\sin^{-1}$

Arcus = Arc

Arête v. angle

Argument de  $a = \text{imag log } a$

Arithmétique (moyenne) §Med 3

» (valeur) = mod

• (triangle) = table de C

ἀριθμός =  $N_1 + 1$ .

Arrangements  $n$  à  $n$  avec répétition  
des objets  $k = k F 1 \cdots n$

simples =  $k F 1 \cdots n$  sim. §π 3-2

ἀσύμμετρος = incommensurabilis.

Axe = ἄξων = droite

Axioma = Ἀξίωμα = Pp

Barycentre §vet 7

Base d'une puissance  $a \uparrow m = a$

» des logarithmes  ${}^a \text{Log } x = a$

Bernoulli (nombres de) = B

Bêta (fonction) §§ 5-3

Binomium =  $\eta \text{ ἐκ δύο ὁνομάτων} =$   
 $R + \sqrt{R}$  §Q 18-3

Binome = somme de deux q

v. coefficients, formule, série.

Bisectrice §vet 40-6

Carré =  $\uparrow 2$ ; carrée (racine) =  $\downarrow$ .

» (nombre) =  $N^2$

Carré magique d'ordre  $m =$

$(1 \cdots m^2 \uparrow 1 \cdots m : 1 \cdots m \text{ ou } \uparrow 1 \cdots m$

$\supset r : \Sigma u_{r,s} [s, 1 \cdots m] = \Sigma (u_{s,r}$

$[s, 1 \cdots m] = \Sigma [u_{s,s} [s, 1 \cdots m] =$

$\Sigma [u_{m-s+1,s} [s, 1 \cdots m]]$

Cascade (Rolle) = D §D 4-3

Centrum = κέντρον.

- Centre de la figure  $k$  =  
      $\text{put } \alpha x \beta [(\text{Sym } x \ k = k)]$   
     » gravité = centre des moyennes  
     distances (Carnot) = barycentre
- Cercle de convergence §q' 10·2
- Champs de points = Cls'put
- Changement de variable §§ 30·11
- Chiffre = 0...9. Le mot dérive de  
*cypbra* = 0.  
     » des unités de  $a$  = Chf  $a$   
     » d'ordre  $n$  de  $a$  = Chf  $X^{-na}$
- Classe = Cls
- Coefficient de  $b$  dans  $ab$  =  $a$   
     » du binôme = C  
     » différentiel = D
- Combination.  $k \in \text{Cls}$  . $\supset$ .  
     combinaisons des  $k$  = Cls' $k$   
     » (avec répétition) =  $N_0 Fk$
- nombre des) = C  
     classe des  $C(m, n)$  =  $n$
- Commensurabilis = *ἀρμεττος*.  
      $a, b \in \mathbb{Q}$  . $\supset$ . ( $a$  est commensurable  
     avec  $b$  =  $a \in \text{Rb}$ )
- Commun diviseur §Dvr  
     multiple §mlt  
      $a, b \in \text{Cls}$  . $\supset$ .  
     classe commune à  $a$  et  $b$  =  $a \cap b$
- Complément de  $x$  (si  $x \in \theta$ ) =  $1 - x$ .  
     » dans les log) =  $10 - x$ .  
     » en trigonométrie) =  $\pi/2 - x$ .
- Componendo, une proportion §R 11·1
- Composante parallèle =  $\text{cmp} \parallel$   
     » normale =  $\text{cmp} \perp$
- Composition des déductions §1 P5·4  
     » vecteurs §vet 3·3  
     » translations, rotations 41, 45
- Conclusion = Ths
- Condensé (ensemble) § $\delta$
- Condition = P contenant des lettres  
     variables §1 P1·4  
      $a$  est cond. nécessaire de  $b$  . $\equiv$ .  $b \supset a$   
      $a$  est cond. suffisante de  $b$  . $\equiv$ .  $a \supset b$
- Cône = *κωνος*. §vet 40·3
- Congruence:  $a \equiv b \pmod{m}$  de Gauss  
     signifie  $a \in b + nm$ .
- Conjugué = conj §q' 3·2
- Consequens terminus rationis  $a/b = b$
- Constante d'Euler =  $C$ .
- Continue (fonction) = cont
- Convergente v. série.
- Convexe (figure) §Med
- Coordinate §vet 12
- Corollarium = conséquence d'une P
- Correspondance = f
- Cosinus = cos
- Cosinus versus  $x$  =  $1 - \sin x$ .
- Cotang  $x$  =  $1/\text{tang } x = \text{tang } \pi/2 - x$
- Cosécante de  $x$  =  $1/\sin x$ .
- Côté = *πλευρά*, v. angle.
- Cubus = *κύβος* =  $\mathbb{N}^3$ , ou  $\mathbb{N}^3$ .
- Cylindrus = *κύλινδρος* §vet 40·3
- Dénominateur de  $a/b$  =  $b$ .  
     réduit = dt
- Dénombrable (ensemble) §Num 43
- Dérivée à gauche, à droite §D
- Dérivé (ensemble) =  $\delta$
- Déterminant (considéré comme un  
     tableau de  $n^2$  q) =  $qF(1 \cdots n : 1 \cdots n)$ .  
     Valeur du déterminant = Dtrm
- Diagonale §vet 8·44
- Dièdre v. angle
- Différent =  $-t$
- Différence entre  $a$  et  $b$  =  $b - a$ .
- Différentielle v. D.
- Disposition v. arrangement.
- Distance des points  $a, b$  =  $\text{mod } b - a$
- Divergente v. série.
- Dividendo §R 11
- Division = opération  $/$   
     du cercle § $\pi$  P2
- Divisible par  $a$  =  $a \in N_1$
- Diviseur de  $a$  =  $N_1 \cap a/N_1$  §II 3·1 §mp 2·2
- Diviseur de 0 §Subst 5
- Divisibilité (caractères de) §Chf 2
- Ellipse (arc) §sin 14·1
- Ensemble = Cls
- Entier (nombre) =  $N_0$ , ou  $N_1$ , ou  $n$   
     » (partie) = E



- Equation = æquatio.
- \* logique §-5
  - » du premier degré §r40 §sb 5·6
  - » second » §Q 56 57
  - » troisième » §Q 58
  - » d'ordre  $n$  §Σ x §q' 5
  - \* différentielle §qn 35 §Sbst 11 15
- Erreur.  $a$  est une valeur de  $b$ , avec une erreur plus petite que  $\epsilon =$   
 $b\varepsilon a + \theta \epsilon$
- Espace = lien des points = pnt.
- » = distance, = arc.
  - \* à  $n$  dimensions = qn.
- Exposant de  $a^m = m$ .
- Exponentielle (fonction) =  $e^x | x$
- Extérieur (ensemble) §Int
- Face v. angle dièdre.
- Facteurs de  $a : b = a : b$
- Factum ex  $a$  et  $b = a : b$
- Faculté de base  $a$ , d'exposant  $n$  de raison  $r$  ( $a, r \in \mathbb{Q}, n \in \mathbb{N}_1$ ) =  
 $\text{an} \text{Dr Kramp} = H(a + [0 \cdots n-1]r$
- Factorielle  $m = m!$
- Fermé (ensemble) §δ
- Figure = Cls pnt
- Fluxio (Newton) = dérivée.
- Fluens = fonction qu'on dérive.
- Fonction = f, ou F.
- » continue = cont.
  - » coissante = cres.
  - » décroissante = decr.
- $f \in$  fonction paire)  $\therefore x \in \mathbb{Q} \cdot \supset x$ .  
 $f(-x) = fx$ .
- » ( » impaire)  $\therefore$  » »  
 $f(-x) = -fx$ .
- Fonctions trigonométriques §sin
- \* hyperboliques §π 3·7
- Formule de quadrature §S 22
- » de Taylor §D 8
  - » du binôme §C 3·1
  - » du polynôme §C 8
- Fraction = R
- » propre = δ
  - \* impropre = /δ = 1+R
  - \* décimale §Σ P11 §Chf 4
- Fraction continue §Q 84 §e 3·1·2
- Frontière (ensemble) §Int
- Impair (nombre) =  $2N_0 + 1$
- Indéterminées (formes) §D 5
- Indicateur (suivant Cauchy) =  $\Phi$
- Indice d'un radical (voir).
- Intégrale = S
- Intégrale multiple §S P20
- Intérieur (ensemble) §Int
- Interpolation (formule d') §D P10.
- Intervalle §Q 19
- Inverse = / . inversions v. Dtrm.
- Invertendo §R 4
- Irrationnel (nombre) = Q-R
- Isolé (ensemble) §δ
- Ligne = pnt fq
- Ligne droite = recta
- Limite = l', l.,  $\lambda$ ,  $\delta$ , Lim, lim.
- Mantisse =  $\beta$
- Matrice d'une substitution) §Sbst
- Maximum, minimum §max, §D 4·1
- Membre d'une égalité §=.
- Module = mod. v. congruence.
- Moyen (point) entre  $a$  et  $b = (a+b)/2$
- Moyenne arithmétique entre  $a$  et  $b$   
 $= (a+b)/2$  §Med
- » géométrique =  $\sqrt{ab}$
  - » harmonique =  $2ab/(a+b)$
  - » arithmo-géométrique =  
 $\pi/S_1[ac \cos x]^2 + (b \sin x)^2] | x, \Theta x \}$   
 §sin 14·3
- Multiple de  $a = a \times N_1$ , ou  $a \times n$ .
- Multiplication, multiplicande, multiplicateur §×
- Négatif (nombre) = -N
- Népérien (logarithme) = log
- Nombre =  $N_0, N_1, n, R, r, \text{Num},$   
 $Q, q, q', B$ , etc.
- Nombre premier =  $N_p$   
 $a$  et  $b$  sont des nombres premiers entre eux  $\therefore \text{Dvr}(a, b) = 1$
- Nombre composé =  $N_1 \cdot N_p$
- Normal (plan) §vet P40·5
- Numérateur §/ §nt
- Numération §Σ P10, §Num

- Opposé v. angle  
 Ordonnée, voir Coordonnées.  
 Osculateur (plan) = planOscul  
 Pair (nombre) =  $2N_0$ , ou  $2n$ .  
 Parallèle, parallélogramme, parallélépipède §vet P40  
 Parfait (ensemble) §δ  
 Partie entière = E  
 » fractionnaire =  $\beta$   
 Perpendiculaire §vet P40  
 Polygones réguliers § $\pi$  2  
 Polynome §+  
 Positif (nombre) =  $+N$   
 Produit de  $a$  par  $b$  =  $a \times b$   
 Produits infinis §lim P20  
 Progression arithmétique dont le premier terme est  $a$ , et la raison  $b$  =  $(a+bn) | n$  § $\Sigma$  3  
 Progression géométrique § $\Sigma$  6·1  
 Projection §vet P40·6  
 Proportio = *Ἀναλογία* §R 11  
 Puissance =  $\uparrow$   
 Quadrature du cercle § $\pi$   
 Quantité =  $Q, q$ .  
 Quotient §quot  
 Racines de l'unité §q'4 § $\pi$  2·2  
 Racine =  $\downarrow$ ; carrée =  $\downarrow$ ; cubique =  $\downarrow$ .  
 Racines (de l'équation  $fx=0$ ) =  $x\mathfrak{z}(fx=0)$   
 Radical =  $\downarrow$   
 Raison = *λόγος* =  $Q$   
 » arithmétique de  $a$  à  $b$  =  $a-b$   
 » géométrique =  $a/b$   
 » composée des raisons  $a, b$  =  $a \times b$   
 » double de  $a$  =  $a^2$   
 » moyenne et extrême §Q 56·3  
 Rapport de  $a$  à  $b$  =  $a/b$   
 Rayon §vet 40  
 Rayon de convergence §q' 10·2  
 Résidu quadratique §Np 5·9  
 Réciproque = rcp, /.  
 Rectifier un arc §vet 53  
 Règle de proportion, de société §R14  
 Reste d'une soustraction §—  
 » d'une division §rest  
 » dans la formule de Taylor §D 9 §S 21  
 Résultante §vet 3·3  
 Sécante de  $x$  =  $1/\cos x$   
 Segment de points §vet 40  
 Série §lim 10  
 » harmonique =  $1/N_1$  » 14  
 » géométrique §lim 16  
 » du binôme §lim 30  
 Sinus = sinus rectus =  $\sin$   
 Sinus totus = 1  
 Sinus versus =  $1 - \cos x$   
 Somme =  $\Sigma$   
 Somme des puissances § $\Sigma$  4  
 Soustraction = opération —  
 Soummultiple = diviseur.  
 Sphère §vet 40·7  
 Surface = pnt f (q : q)  
 Tangente = rectaTang, tang  
 Terme d'une somme, d'une fraction, proportion, série (voir).  
 Théorème = P  
 Trièdre §vet 34  
 Tetraèdre régulier §vet 9·6 35·2  
 Transitivité §1 2·4  
 Triangle = pnt F1...3  
 » équiangle §vet 9·5 35·1  
 » rectangle §vet 8·6  
 Trigonométrie §i § $\pi$  §sin §vet 33  
 » sphérique §vet 34  
 Unité = 1  
 » imaginaire =  $i$   
 » complexe = unit §qn P2  
 » (vecteur) =  $U$ .  
 Variable =  $q, f, F$ . Voir §4.  
 Vitesse §vet 54

*Publications*

*citées par une abréviation dans le F.*

La lettre F suivie de l'année, indique les éditions partielles ou totales du Formulaire, que nous avons successivement publiées :

F1888 = *Calcolo geometrico, preceduto dalle operazioni della logica deduttiva.*

F1889 = *Arithmetices principia, nova methodo exposita.*

F1894 = *Formulaire de Mathématiques (Introduction).*

F1895 =           »           »           t.1.

F1897 =           >           >           t.2 N1.

F1898 =           »           >           t.2 N2.

F1899 =           >           >           t.2 N3.

RdM. = *Rivista di Matematica*, t.1-5 a.1891-95.

= *Revue de Mathématiques* t.6 a.1896-99, t.7 a.1900.

AErud. = *Acta Eruditorum*, Lipsiae a.1682-1757.

AJ. = *American Journal of Mathematics*, Baltimore a.1878...

AM. = *Acta Mathematica*, Stockholm a.1882...

AmericanT. = *Transactions of the American Mathematical Society*, New-York a.1900...

Amsterdam Ak. = *Versl. d. k. Akad. v. W.* te Amsterdam

Ann. = *Annales de Mathématiques* publiées par G. F. Gergonne, a.1811-29.

AnnN. = *Nouvelles annales de Mathématiques*, Paris, a.1840...

BBone. = *Bullettino di bibliografia etc.*, di B. Boncompagni, Roma a.1868-87.

BD. = *Bulletin des Sciences mathématiques*, par Darboux, Paris a.1877...

BsF. = *Bulletin de la Société math. de France*, Paris a.1873...

BerolMisc. = *Miscellanea Berolinensia*.

BerlinM. = *Mémoires de l'Académie des Sc. de Berlin*, a.1745...

BolognaM. = *Memorie dell'Accademia delle scienze di Bologna*, a.1850...

BM. = *Bibliotheca Mathematica*, Journ. d'hist. d. math., publié par G. Eneström, Stockholm, a.1887...

CambridgeT. = *Transactions of the Phil. Society Cambridge*...

CorrM. = *Correspondance Mathématique etc.* publiée par P. H. Fuss, St. Petersbourg a.1843.

CorrN. = *Nouvelle correspondance Mathématique*, a.1878...

Encyklopädie = *id. der Mathematischen Wissenschaften*, Leipzig a.1898...

IdM. = *Intermédiaire des Mathématiciens*, Paris a.1894...

- JdM. = Journal de Mathématiques publiés par Liouville, Résal, Jordan,  
Paris a.1836...
- JfM. = Journal für die reine und ang. Math., Berlin a.1826...
- JP. = Journal de l'École Polytechnique, Paris a.1795...
- LondonT. = Philosophical Transactions of the R. Society, London a.1666...
- LondonP. = Proceedings of the R. Society, London
- MA. = Mathematische Annalen, Leipzig a.1869...
- Mathesis publié par P. Mansion, Gand a.1881...
- Mm. = The Messenger of mathematics, London, a.1871...
- MünchenB. = Münchener Berichte.
- Monh. = Monatshette für Mathematik, Wien a.1889...
- NapoliA. = Atti della Accademia delle scienze di Napoli, a.1787...
- NapoliR. = Rendiconti               »               »               »               »
- PalermoR. = Rendiconti del Circolo matematico di Palermo, a.1884...
- ParisM. = Mémoires de l'Acad. des Sciences de Paris, a.1666...
- ParisCR. = Comptes rendus de l'Académie des Sciences, Paris a.1835...
- ParisSE. = Memoires présentés par divers savants à l'Académie des sciences  
de Paris = (Savants Étrangers) a.1805...
- PetrC. = Commentarii Academiæ Scientiarum Petropolitanae, a.1726-1746.
- PetrNC. = Novi Commentarii Academiæ Scient. Petropolitanae, a.1747-1776.
- PetrA. = Acta Academiæ Scientiarum Petropolitanae, 1777-1782.
- PetrNA. = Nova Acta Ac. Sc. Petropolitanae, a.1783...
- PetrB. = Bulletin de l'Ac. des Sc. de St. Petersbourg.
- QJ. = Quarterly Journal of Mathematics. Cambridge a.1857...
- TorinoA. = Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino a.1865...
- TorinoM. = Memorie               »               »               »               »               » a.1759...
- Zm. = Zeitschrift für Mathematik und Physik, Leipzig a.1856...

## BIBLIOGRAPHIE

Les numéros indiquent les P du F où chaque A. est cité.

“ *n* ” signifie “ Note ”.

ABEL Niels Henrik, a.1802—1829. *Œuvres*, Christiania a.1881.  
 $\S \supset 1:7n$   $\S C 7:2$   $\S \text{lin} 13:41$   $15:3$   $19:4$   $23:2:3$   $\S q 10:1:4$   $\S \text{sin} 9:3:5$

ABŪ'LWÉFA a.940—998.  $\S \text{sin} 4:1$   $\S \text{vet} 34:2$

ADAMS  $\S B 1:2:3$

AHMÈS (Aahmesu), papyrus Rhind, a.—1740—2200? publié par :  
 EINSELEHR, *Ein Mathematisches Handbuch der alten Aegypter*, Leipzig a.1877.  $\S — 2n$   $\S / 8:6$   $14:1$   $\S \Sigma 6:1$   $\S \pi 1:1$

ALBATEGNIUS = AL BATTĀNĪ a.880.  $\S \text{sin} n$   $\S \text{vet} 34:1$

ALCHODSCHANDĪ Muhammed, a.992. Cfr. M. Cantor t.1 p.708.  
 $\S \nabla 6:0$

ALQĀCHĀNĪ, *La clé du calcul*, a.1589. Cfr. Woepeke, *Annali di Matem.* a.1864 t.5 p.225.  $\S \Sigma 3:4$   $4:1$

AMIGUES.  $\S \Sigma 4:2$

ANTHONISZ A. a.1527—1607  $\S \pi 1:5$

APOLLONIUS PERGÆUS = Ἀπολλώνιος ἡ Περγαιῶς a.—200?  
 — *Quæ Græce extant*, Edid. Heiberg, Lipsiæ a.1891-93.  
 $\S \text{vet} 8:63$   $84:83$   $9$

ARBOGAST L. F. A. a.1759—1803.  
 — *Du calcul des dérivationes*, a.1800  $\S D 8$

ARCHIMEDES = Ἀρχιμήδης, a. —287—212.  
 — *Opera omnia*, Edid. Heiberg, Lipsiæ a.1880.  
 $\S \Sigma 4:1$   $10:1$   $\S \pi 1:2$

ARISTOTELES, a.—384—322.  
 — *Analytica priora* (Ἀναλυτικά προτερα),  $\S \supset 1:1:7n$   $4:4$   $\S \wedge 1:7$

ARYABHATA, a. 475—550. Cfr. Rodet, *Leçons de calcul d'Aryabhata*, Journal Asiatique, a.1879, 1880.  
 $\S / 40:1$   $\S \Sigma 3:3$   $4:1$   $10n$   $11:1:2$   $\S \pi 1:4$

- BABBAGE Charles a.1790–1871. London T. a.1815 §+ 10·9 $n$
- BACHET, a.1581–1638.  
— *Commentaria in Diophantum*, a.1621. §¶ 5·4 §q 57·3
- BARRIEU P. §Dvr 4·2·4 §mlt 2·3·74 §nt 1·93 §mp 3·6·8
- BERNOULLI Jacobus a.1654–1705.  
← *Ar's conjectandi*, Basileæ, a.1713. §Σ 4·1 §C 6·5 §B1·1·2  
— Opera, Genève a.1744. §lim 7·3 8·8
- BERNOULLI Johannes a.1667–1748.  
— Opera, a.1742. §! 8 §lim 8·9 16·8 21·6 22·5  
§D 8·1 §S 11·2 §π 3·4·41  
— CorrM. §! 7·8
- BERNOULLI Daniel a.1700–1782.  
— CorrM. §lim 16·64  
— PetrC. t.3. §lim 25·1
- BERNOULLI Johannes II, a.1710–1790 §log 2·61
- BERTRAND Joseph, 1822–1900.  
— JdM. a.1843 §π 11·4 — JP. a.1845. §Np 2·2  
— *Arithmétique*, Paris, a.1849. §Dvr 4·0·1 §mlt 2·0·1·2  
— „ „ a.1851. §E 2·0  
— *Algèbre* „ a.1855. §¶ 9·07 16·2 §sin 5·3
- BINET Jacques, a.1786–1856.  
— a.1813 JP. t.9 p.280-354. §S 5·7 $n$  §Dtrm 2·2
- BOLZANO Bernard, a.1781–1848.  
— *Rein analytischer Beweis...* Prag a.1817, Facsimile Druck  
Berlin a.1894 §lim 1·3
- BOMBELLI Rafael, *L'Algebra*, Bologna, a.1579 §q' 1·3
- BONGO Pietro (Bungus) a.?–1601.  
— *Numerorum Mysteria* etc. Bergomi a.1599. §Np 2·1
- BONNET Ossian. §S 3·7
- BOOLE George, a.1815–1864.  
— *The laws of thought*, London a.1854.  
§D 6·3 §Λ 1·3 2·1·2 §- 2·62 3·94 5·2·4

BRAHMAGUPTA, a.598<sup>+</sup>?

— Journ. Asiatique a.1878, trad. par Rodet. §n 4·01 §Q 56·21

BROUNCKER William, a.1620<sup>+</sup>1684.

— *Quadratura hyperbolae*, LondonT. a.1668. §lim 14·3

BURALI-FORTI, *Logica matematica*, a.1894. § $\supset$  P3n

BURCKHARDT Johann, a.1773<sup>+</sup>1825. §Np 1·1n

BÜRGI Joost a.1552<sup>+</sup>1632. §Σ 11n

CANTOR Georg, §Num §Np 1·4n §Q 70·1·3 §δ §cont 2·3  
§qn 4.

CANTOR Moritz, *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik*,

II Auflage t.1 Leipzig a.1894. t.2 a.1900. §Σ 10n §Q 53n

CATALAN E. §Σ 7·1

CAUCHY Augustin, a.1789<sup>+</sup>1857.

— a.1821 = *Analyse Algébrique*. Œuvres s.2 t.3 §— 2n

§Σ 20·2 §modn §Med 1·0n 2·3·3·6 3·1·6·7 4·1 §Lm 1·0n

§lim 1·1·4n 7·4 8·6 10·1·3 13·3 15·2·3 16·11·12 18·1 19·1·2·3

21·1·3 22·4 §cont 2·1 3·1·2 §e 2·3 §Dtrm 3·1

— *Œuvres*, § $\uparrow$  2·14·15 15·71 §! 2·1n §D 1n §Dtrm 1·6.

— *Exerc. d'analyse et de phys. math.* § $\uparrow$  14·28·72 §D 9·2

§qn 35·1n §Subst 13·2

CAVALIERI Bonaventura, a.1598<sup>+</sup>1647.

— a.1635 = *Geometria indivisibilibus continuorum nova quadam ratione promota*. Bononiae a.1635 §D 4·4

— a.1639 = *Centuria di varii problemi* etc., Bologna  
§S 1n 5·1

CAYLEY, *Mathematical Papers* §Subst 13·1

CESÀRO Ernesto, *Excursions Arithmétiques*, a.1885. §E 2·2

— *Analisi Algebrica*, Torino a.1891 §lim 18·6

— NapoliA. a.1893. §π 4·1·6 — NapoliR. a.1896. §lim 31·4

CHUQUET Nicolas, a. 1445<sup>+</sup>? *Triparty en la science des nombres*,

a.1484. Bullettino di Boncompagni a.1880 t.13 p.593.

§— 2n §/ 16·5 § $\uparrow$  1·0n 30·6 §Q 53·8

COTES Roger, a.1682 — 1716.

— *Logometria* a.1714 LondonT. t.29 p.4-60 §c 1·2 3·1 §sin 1·3

— *Harmonia mensurarum*, ed. Smith, Cantabrigie a.1722.

§§ 22·2·6 §π 2·3 §sin 16·1·3

CRAMER Gabriel, a.1704 — 1752.

— *Introduction à l'analyse des courbes algebriques*, a.1750.

§Dtrm 1·4

DARBOUX Gaston, *Mémoire sur les fonctions discontinues*, An  
nales scient. de l'Ecole normale supérieure s.2 t.4 a.1875.

§I 2*n* §S 2·31 11·12 12·1

DASE Zacharias.

§Np 1·1*n* §π *n* §sin 5·4

DEGEN C. F. a.1766 — 1825

§I 14·6

DELAMBRE

§vet 34·7

DE MORGAN Augustus, a.1806 — 1871.

— *Formal logic* a.1847

§c 1·61 §∧ 1·8 2·7

-- *On the syllogism*. CambridgeT. a.1858.

§= 3·1·4

DESCARTES René, a.1596 — 1650, *La Géométrie*, a.1637. §I 1*n*

— *Œuvres*, ed. Ch. Adam et P. Tannery, Paris a.1897... §Nprf 3

DIOPHANTUS, a. 325 — 409.

*Διοφάντου Ἀλεξανδρείας Ἀριθμητικὸν*, Edid. Tannery, a.1893.

§— 2*n* §X 6·01 §/ 40·2·5·6·7·8 §I 1·4 2·1 14·41 §Q 57·1·2·4

DIRICHLET (Lejeune) Gustav, a.1805 — 1859.

— *Werke*, Berlin, a.1889. §Np 12·6 §lim 18·2 31·6 §S 3·6*n*

DIXON

§! 7·51

EISENSTEIN Ferdinand, a.1823 — 1852.

— JfM., a.1843, t.27 p.193; a.1844, t.28 p.39.

§Np 7·4 §lim 8·5 16·91 20·4 §log 2·8

— *Mathematische Abhandlungen*, a.1847.

§q<sub>n</sub> 25·2

ENCKE Johann Franz, a.1791 — 1865

§lim 25·2

EUCLIDES = Ἐυκλείδης, a.—315 — —255.

*Opera omnia*, edid. Heiberg, Lipsia, a.1884.

§ $\bigcup$  1·1*n* §X 1·31·4 3·2·3 5·1 §/ 4·1·2·5·7 5·2 11·1·4

16·1·3 21·1 §I 1·6 2·1 4·01·1 5·2 9·03 14·02·03·24 §Σ 6·1



§Dvr 1·12·17·18·19·22 2·11·3·31·4·41      §mult 1·12·2·41·42  
 §Np 1·2·3 3·4·7·71 7·1 12·1      §Nprt 2      §Q 5·41·5 55·4  
 56·1·11·3 8·41 §vet 2·4 8·6·62 9·41·5·6 14·1 32·11·14 33·1·3

EULER = Leonardus Eulerus, a.1707 — 1783.

- a.1728 = BM. a.1899 p.46      § $\pi$  5·1
- PetrC. t.6 a.1732; t.7 a.1734-35; t.8 a.1736 t.9 a.1737.  
     § 5·6 §Np 3·9 §Q 8·2 §lim 31·3 §e 1·3 §C'0n § $\pi$  3·4
- PetrXC. t.1 a.1747-48; t.5 a.1754-55; t.7 a.1758-59;  
     t.8 a.1760-61; t.13 a.1768; t.14 1 a.1769; t.19 a.1774.  
     § 14·34 §! 7·7 §Dvr 2·46·47 §Np 3·91 5·1·5 12·3 § $\Phi$  2·6  
     §lim 17·2 §cont 3·6 §C'3·4 §sin 8·2 §B 1·4·8 §vet 8·71
- PetrA. t.5 a.1781.      §! 2·2 §log 2·8 §C'3 § $\pi$  11·1
- PetrNA. t.12 a.1794.      §! 7·6
- BerolMisc. a.1743. §e 1·3 — BerlinM. a.1772. §Np 3·4 6·3
- CorrM. t.1.      § 14·07·09·25 §C'n
- a.1748 = *Introductio in analysin infinitorum*, Lausannae.  
     §lim 20·3 §e 3·2 § $\pi$  3·42·7·8 5·3·4 §sin 1·0 3·4 5·3 8·1·3·4·7
- *Institutiones Calculi Differentialis*, Berolini a.1755. §B n
- a.1768 = *Institutiones Calculi integralis*, Petropolis a.1768.  
     (II édit. a.1794 t.4) §S 11·3 §q' 2n § $\pi$  10·2·3 §sin 12·8
- *Lettres à une Princesse d'Allemagne* a.1768 § $\supset$  1·3n.
- *Opera posthuma*, ed. Fuss, Petr. a.1862. § 15·61 §Np 6·2

FERMAT Pierre, a.1608 — 1665. Œuvres, Paris a.1891.

§ 5·2·4·42 6·1·4      § $\Sigma$  4·1 §II 4·1 §Np 3·21·22·3·8·9 4·3  
 10·2 § $\mathcal{C}$  5·2

FOURIER J-B. Joseph, a.1768 — 1830.      §e 2·3

— *Théorie analytique de la chaleur*, Paris, a.1822 §S 1·1n

FRÉVILLE DE BESSY.

- a.1676 = *Traité des triangles rectangles en nombres* § 5·3
- a.1693 = ParisM. *Abregé des combinaisons*      §! 4·2

FRESNEL Augustin a.1788 — 1827..

— Œuvres, Paris, a.1866.      §sin 13·2

GAUSS, a.1777 — 1855. Werke, a.1863.

§! 1·0n § $\Phi$  0n·1 §E 1·0n 2·1 §Dvr 2·7 § $\pi$  2·1 §sin 5·3.

GENOCCHI A.

§B 1·21

- GERGONNE J.  $\S\uparrow$  14.13  $\S!$  9.1  $\S$ Np 3.5  $\S\tau$  1.85
- GERMAIN Sophie, a.1776 — 1831. BerlinM. a.1772.  $\S$ Np 3.6
- GIRARD Albert, a. 1590 — 1634.  
— *Invention nouvelle en l'algebre*, Amsterdam a.1629.  
 $\S\bigcup$  1.2n  $\S>$  1.0n  $\S\uparrow$  1.0n  $\S$ Q 5.3n  $\S$ q' 5.2  
— (Voir STEVIN).  $\S$ Np 3.2  $\S$ mp 1.7
- GLAISHER  $\S$ Np 1.1n
- GLAISHER J. W.  $\S$ Np 13.2  $\S$ q 20.1
- GOLDBACH, a.1690 — 1764. a.1742 CorrM.  $\S$ Np 1.4 3.6
- GRASSMANN Hermann, a.1809 — 1877.  
— Werke, a.1894.  $\S$ q<sub>n</sub> 2n  $\S$ vet 1n 8n
- GREGORIUS Jacobus, a.1638 — 1675.  
— *Exercitationes geometricæ*. Londini a.1668.  $\S$ log 1.3  $\S$ sin 7.3
- GUILMIN Charles, a.1812 — 1884.  $\S!$  2.0n
- HAMILTON William Rowan, a.1805 — 1865.  
— a.1845, Cambridge Math. Journ. t.1  $\S$ vet 1n 8n  
— *Elements of Quaternions*, London a.1899.  $\S$ vet 15 46 61n
- HARRIOT Thomas, a.1560 — 1621.  
— *Artis Analyticæ praxis*, Londini a.1631.  
 $\S>$  1.0n  $\S\uparrow$  9.06.09.11.12.19.20.24
- HAUBER Karl Friedrich, a.1775 — 1851.  
— *Scolæ logico-mathematicæ*, Stuttgart a.1829.  $\S\wedge$  2.6
- HEINE.  $\S$ cont 1.1n
- HERIGONE Pierre, *Cursus Mathematicus*, Paris a.1636-46.  $\S!$  6.4
- HERMITE Charles  $\S$ e 2.4
- HERON = *Ἡρόων* a.150, *Περὶ Μέτρων*. Notices et Extraits de  
la Bibl. Imp. de Paris, a.1808 t.19 II.  $\S$ vet 35.61
- HESSEL, a.1796 — 1872. *Kristallometrie*, a.1831.  $\S$ sin 1.8
- DE L'HOSPITAL G. F., a.1661 — 1704.  $\S$ D 5.1
- IBN ALBANNA, a.1275?; *Le Talkhys d'Ibn Albanna publié et traduit par A. Marre*, Roma 1865. Atti Ac. Pont. N.Linc. t.17, a.1864.  
 $\S\S$  5.1



- LEIBNIZ Gottfried Wilhelm = LEIBNITIUS, a.1646–1716.  
 — *MathS.* = *Mathematische Schriften*, ed. Gerhardt, a.1848-63.  
 $\S\uparrow$  15·22  $\S\Sigma$  10*n*  $\S!$  8  $\S\text{mod}$  1·0*n* 2·9  $\S\text{Dvr}$  2·45  
 $\S\text{Np}$  3·9 9·7  $\S\text{lim}$  12·4 14·1 16·9  $\S\text{D}$  1*n* 3*n* 6·3  $\S\S$  20·5  
 $\S\epsilon$  2·2  $\S\pi$  3·3  $\S\sin$  7·3  $\S\text{Dtrm}$  1·4  
 — *PhilS.* = *Die philosophischen Schriften*, ed. Gerhardt, Berlin,  
 a.1875-90  $\S\bigcup$  4·2 5·3·6 6·0 7·2 10·6  $\S\cup$  1·3·6 2·1·2·4  
 $\S\wedge$  1·0 2·5  $\S-$  4·1·2  
 — *Briefwechsel mit Mathematikern* ed. Gerhardt, Berlin a.1899.  
 $\S\text{D}$  *n*  
 — *Mss.* = Manuscrits inédits, conservés à la bibliothèque de  
 Hannover, et publiés dans F1899 par M. Vacca.  
 $\S\bigcup$  1·3*n* 4·4 6·1·2  $\S-$  2·2  $\S!$  8  $\S\text{Np}$  9·2
- LEONARDUS PISANUS, de filiis Bonaccii *Liber abbaci*, a.1202.  
 (Pubblicato da B. Boncompagni, Roma, a.1857.)  
 $\S/$  1*n*  $\S\text{Np}$  3·1  $\S\text{Q}$  56·11
- LINDEMANN F., MA. a.1882  $\S\pi$  1·9
- LIONNET  $\S\text{Nprf}$  5
- LIOUVILLE Joseph, a.1809–1882.  
 — *JdM.* a.1857.  $\S\text{mp}$  2·6  $\S\epsilon$  1·32
- LOBATTO  $\S\sin$  9·6
- LUCAS Édouard, a.1842–1891.  
 — *TorinoA.* a.1878 t.13 p.283.  $\S\text{Dvr}$  2·48·49  $\S\text{Np}$  4·4  
 — *AJ.* a.1878 t.1 p.229.  $\S\text{Np}$  9·71·72 11·2·3  
 — a.1891 = *Théorie des nombres*, Paris.  $\S\Sigma$  4·2  $\S\text{Np}$  12·4
- MCCOLL Hugh, *The calculus of equivalent statements*. Pro-  
 ceedings of the London Mathematical Society a.1878 t.10.  
 $\S\bigcup$  5·6 6·0 7·3  $\S\cup$  1·3 2·5 4·2·21; — a.1900  $\S\cup$  4·22
- MACLAURIN Colin, a.1698–1746.  
 — *A treatise of Fluxions* a.1742.  
 $\S\text{lim}$  12·1 14·3·6 16·7  $\S\text{D}$  8  $\S\S$  11·0  
 — *A treatise of Algebra*, a.1748.  $\S-$  2*n*
- MANSION Paul.  $\S\text{Dtrm}$  3·3  
 a.1887 = *Résumé du cours d'anal. inf.*, Paris.  $\S\text{lim}$  18·4

MASCHERONI Lorenzo, a.1750 — 1800.

— *Adnotationes ad calc. integr.* etc. Ticini a.1790. §C n

— *Geometria del compasso* §π 1·81

MERCATOR Nicolaus, a.1620 — 1687.

— *Logarithmo-technia*, Londini a.1668. §lim 16·2 §log 1·3

MERTENS. §lim 19·3

METIUS Adrianus, a.1571 — 1635. §π 1·3

MÖBIUS August, a.1790 — 1868.

— *Werke*, Leipzig a.1885. §vct 7·6

NASIR EDDIN ATTÛSI §vct 33·6

J. NEPERUS, a.1550 — 1617.

— *Mirifici logarithmorum canonis descriptio* a.1614.  
§Log §vct 34·6·8

NEWTON, a.1642 — 1727.

— a.1676 = *Epistola prior Isaaci Newtoni ad Henricum Olden-*  
*burgium*, 13 Junii 1676.

§Q 53n §lim 23·1 §e 2·1 §sin 7·1·2

— a.1686 = *Philosophiæ naturalis principia mathematica*  
§D 3n 10·1n

NICOLE §II 4·2

NICOMACHUS = Νικόμαχος, a. 50 — ? edid. Hoche. §Σ 4·1

OLTRAMARE. §↑ 15·13 §Σ 5·2

ORESME Nicole, a.1323 — 1382. §Q 53n

OSBORN §Np 13·1

OUGHTRED Guilielmus, a.1574 — 1660.

— *Clavis Mathematica*, a.1631. §> 1·0n §× 1·0n

— *Opuscula Mathematica*, Oxonii a.1667. §/ 1·5n

PACIOLO Luca, a.1440 — 1515, *Summa de Arithmetica Geometria*  
*Proportioni et proportionalita*, a. 1494. §— 2n

PADOA Alessandro

§J 3·43 §A 3·3 §t 3·4·8 §: 1·41 §' 1·11·6 §+8 n §ntn

PAPPUS = Πάππος, a.150. §/ 16·3

- PARSEVAL Marc Antoine, a. 1781 — 1836 § $\pi$  12.4  
 PASCAL Blaise, a. 1623 — 1662.  
 — Œuvres, Paris 1889, t.3. §+ 4.3 §! 1.1 3.2.3 7.3 §Chf .2  
 PEIRCE Charles, *Three papers on logic*. Proceedings of the American Academy a. 1867. § $\cup$  3.22 §= 3.7.9  
 — a. 1880. *On the Algebra of Logic*, AJ. t.3 p.15. § $\supset$  9.4 § $\cup$  3.4 §= 2.6 3.7  
 PELL John, a. 1610 — 1685, *Introductio in Algebram*, Londini, a. 1668. (Voir WALLIS, t.2 p.238) § $\supset$  1.7.11 § $\uparrow$  1.0.11  
 PERVOUCHINE. § $\uparrow$  5.6 §Np 3.4  
 PIERI Mario § $\cup$  3.5  
 PLANA Giovanni a. 1781 — 1864. § $\pi$  10.43  
 PRINGSHEIM Alfred.  
 — MA. a. 1888 t.33. §! 10.4  
 — *Irrationalzahlen und Konvergenz unendlicher Prozesse*. Encyclopädie a. 1898 t.1 p.47-146. §! 1.11  
 — MünchenB. a. 1899 §§ 20.12  
 PRIOR §/ 41.0  
 PROTH, CORN. a. 1878. §Np 4.2  
 PTOLEMEUS Claudius = *Πτολεμαῖος Κλαυδῖος*, a. 150.  
 — *Opera omnia*, ed. Heiberg, Lipsiae, t.1 a. 1889. § $\pi$  1.3 §sin 1.6 4.4  
 PYTHAGORAS = *Πυθαγόρας* a. — 569 — — 470. § $\uparrow$  14.24 § $\Sigma$  3.1.2 §vet 8.6  
 REGIOMONTANUS = JOANNES DE REGIO MONTE  
 RIEMANN Bernhard, a. 1826 — 1866.  
 — *Werke*, Leipzig, a. 1876. §lim 18.3  
 ROLLE Michel, a. 1652 — 1719.  
 — *Traité d'Algebre* a. 1689. §D 4.3  
 ROSENBERG. §Np 1.111  
 SCHLÖMILCH O. *Differential- und Integralrechnung*, Griefswald, a. 1847. §D 9.3

SCHRÖDER Ernst.

— a.1877 = *Operationskreis des Logikkalküls*

§ 2·3 3·2·21·42 §- 3·1-4·92 5·1

— *Algebra der Logik*, a.1890,1891,1895. § 3·23·41 §- 3·93·94 5·3

H. A. SCHWARZ.

§D 10·1

SEGNER Johann Andreas, a.1704 — 1777.

— *Specimen logicae universaliter demonstrativae*, a.1740.

§  $\supset$  P1·7n §- 3·6

SMITH Henry John Stephen, a.1826 — 1883.

— *The Collected Mathematical Papers*, Oxford, a.1894.

§Dtrm 4·1·2

STERN

§lim 22·1

STEVIN Simon, a. 1548 — 1620, *Oeuvres mathématiques*, publiées

par Albert Girard, Leyde a. 1634.

§Σ 11n

STEWART Matthew, a. 1717 — 1785.

— *Propositiones geometricae more veterum demonstratae*,

Edinburgh a.1763.

§vet P14·2

STIELTJES Thomas Jean a.1856 — 1894.

— AmsterdamAk. a.1882

§D 10·1

— a.1895 = *Essai sur la th. des nomb.* §Dvr 1·34 §mlt 1·34

STIFEL, 1487 — 1567.

— *Arithmetica integra*, a.1544.

§¶ 2·1

— *Deutsche Arithmetica inhaltend die Hausrechnung, Deutsche*

*Coss and Kirchrechnung*. Nürnberg, a. 1549.

§- 2n §l' 2·0n

STIRLING Jacobus, a.1692 — 1770.

— *Methodus differentialis: sive tractatus de summatione et*

*interpolatione serierum infinitarum*, Londini a.1730.

§lim 14·4 22·6 §S 5·3·7 §π 3·5·6 §B 2·2

TARTAGLIA Nicolò, a.1500 — 1557.

— *Quesiti et Inventioni diverse*, Vinegia a.1546.

§Q 58·1

— *La seconda parte del general trattato di numeri, et misure*.

Venezia, a.1556.

§¶ 2·1 §l' 6·1 7·1n

Brook TAYLOR, a.1685 — 1731.

— *Methodus incrementorum directa et inversa*, a.1715. §D 8n

- TCHEBYCHEF P., a.1821—1894.  
 — Œuvres, St. Petersburg a.1899 t.1 §Np 2·2 11·1  
 §lim 31·1·3 §log 3·2
- THALES = Θαλῆς, a.—640 —548. §vct 8·8
- THEON SMYRNAEUS, a.120 —180, ed. Hiller, a.1878. §Σ 3·1·2
- THOMÉ §scont 1·1
- TSCHU SCHI KIH, a. 1303. Voir A. WYLIE, trad. par Biernatzki,  
 JfM. a.1856, t.52, p.87. §f 2·1
- VAILATH G. §- 2·54
- VANDERMONDE §Dtrm 3·1
- VEGA Georg, a.1756 —1802.  
 — *Thesaurus logarithmorum* a.1794. §πn §sin 5·4
- VIETA Franciscus, a.1540 —1603.  
 — *Canon Mathematicus* Paris a.1579 §Σ 11n §π n  
 — a.1615 = *Ad angularium sectionum analytice theoremata*  
 studio A. ANDERSONI,... Parisiis a.1615 §sin 6·1  
 — *Opera* ed. Schooten, Leyda a.1631. §π 1·82 3·1 §sin 4·5 10·1
- VIVANTI G. §! 7·52
- WALLIS Joh., a.1616 —1703.  
 — *Opera Mathematica*, Oxoniæ, a.1695. §Σ 4·1 §Chf 4  
 §mp 2·2·5 §! 4·0n §lim 1·1n §S 1·1n §π 3·2
- WARING Eduardus, a.1736—1798.  
 — *Meditationes algebraicae*, edit. prima a.1770, edit. tertia Can-  
 tabrigiæ a.1782. §Σ 5·2 §Np 9·4·62
- WEIERSTRASS Karl, a.1815—1897.  
 — *Werke* a.1894. §mod n §! 2·0n §scont 2·3 §S 11·12  
 §qn 2n §Subst 5·04n §q' 3·0n 10·3
- WESSEL Caspar, a.1745 —1818.  
 — *Essai sur la représentation analytique de la direction*, Cope-  
 nhague, a.1897. (traduct. de l'original de l'a.1797). §vct 2·0n
- WHITEHEAD, *Universal Algebra*, t.1 a.1898. §- P2·63
- WILSON Joh. §Np 9·4



# TABLE DES MATIÈRES

Préface . . . . .	p.iii
<i>Première partie</i> — Logique mathématique . . . . .	p.1
§ $\bigcup$ p.1	§ $\bigcap$ p.19
§ $\exists$ p.28	§ $\forall$ p.30
§ $\forall$ p.33	§ $\vdash$ p.35
§ $\wedge$ p.22	§ $\vee$ p.24
§ $\neg$ p.31	§ $\rightarrow$ p.32
§ $\sim$ p.37	
<i>Seconde partie</i> — Arithmétique . . . . .	p.39
§ $+$ p.39	§ $<$ p.47
§ $\wedge$ p.60	§ $\dots$ Num p.70
§mod p.84	§max min p.85
§Chf p.89	§Dvr p.90
§Xp p.95	§mp p.100
§ $\theta$ p.104	§ $\ell$ p.105
§Med p.116	§ $\ell$ p.117
§ $\times$ p.51	§ $\sum$ p.73
§ $\times$ p.80	§ $\text{quot}$ rest p.86
§ $\text{milt}$ p.92	§ $\text{E}$ p.87
§ $\text{nt}$ dt p.94	§ $\text{C}$ p.81
§ $\Phi$ p.102	§ $\text{Xprf}$ p.103
§ $\text{Q}$ p.107	§ $\text{Log}$ p.115
§ $\delta$ p.119	§ $\text{Int}$ p.120
<i>Troisième partie</i> — Fonctions analytiques . . . . .	p.121
§ $\text{cres}$ p.121	§ $\text{Lm}$ p.122
§ $\text{D}$ p.138	§ $\text{s}$ p.147
§ $\text{C}$ p.159	§ $\text{e}$ p.154
§ $\text{contp}$ p.136	§ $\text{logp}$ p.157
<i>Quatrième partie</i> — Nombres complexes . . . . .	p.160
§ $q_n$ p.160	§ $\text{Dtrm}$ p.164
§ $\pi$ p.175	§ $\text{sin}$ p.181
§ $\text{Subst}$ p.167	§ $q'$ p.171
§ $\text{B}$ p.190	
<i>Cinquième partie</i> — Vecteurs . . . . .	§ $\text{vct}$ p.192
Table des signes . . . . .	p.210
Vocabulaire mathématique . . . . .	p.213
Publications périodiques . . . . .	p.217
Bibliographie . . . . .	p.219









Return on  
or before

Return on or before

Return on or before

Return on or before

QA41.P43

SCIII



3 5002 00035 0848

Peano, Giuseppe  
Formulaire des mathématiques

QA41 .P43

Peano, Giuseppe, 1858-1932.

Formulaire des  
mathématiques

9/30/38 Phil 306

JUN 4 1938

*copy*

QA41 .P43

Peano, Giuseppe, 1858-1932.  
Formulaire des  
mathématiques

